Le cours d'Ariane Mézard

Ariane Mézard

14 mai 2024

Table des matières

Première partie
Fonctions Holomorphes

1 Fonctions Analytiques

1.1 Séries Entières

Définition 1.1: Série Entière

Une série entière est une série de la forme $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ où $z \in \mathbb{C}$ et $a_n \in \mathbb{C}$.
Le domaine de convergence de la série entière est l'ensemble Δ des nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ pour lesquels la série converge.

Proposition 1.1: Critère de Cauchy

Soient a_n une suite complexe et $0 < r < r_0$. S'il existe $M > 0$ tel que

$$|a_n| r_0^n \leq M, n \geq 0$$

alors $a_n z^n$ converge normalement sur $\overline{D}(0, r)$.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \overline{D}(0, r)$ on a :

$$|a_n z^n| \leq |a_n| r^n \leq M \left(\frac{r}{r_0}\right)^n$$

Comme $0 < r < r_0$, $M\left(\frac{r}{r_0}\right)^n$ est le terme d'une série géométrique convergente. ■

Corollaire 1.1: Rayon de Convergence

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière et $R \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ défini par

$$R = \sup\left\{r \geq 0 \text{ tel que la suite } \left(|a_n| r^n\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ soit bornée}\right\}$$

Alors le domaine de convergence Δ de la série vérifie :

$$D(0, R) \subseteq \Delta \subseteq \overline{D}(0, R)$$

Définition 1.2: Rayon de Convergence

On appelle le nombre R défini ci-dessus rayon de convergence.

Proposition 1.2: Rayon d'Hadamard

Le rayon de convergence est donné par

$$R = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{|a_n|^{1/n}}$$

Avec la convention $1/0 = \infty$

Lemme 1.1: Lemme d'Abel

Soit u_n une suite réelle décroissante vers 0 et v_n une suite complexe telle que les sommes partielles $s_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ soient bornées. Alors la série $\sum u_n v_n$ converge.

Proposition 1.3: Principe des Zéros Isolés

Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Si au moins un des coefficients a_n n'est pas nul, il existe $r \in]0, +\infty[$ tel que f ne s'annule pas pour $|z| \in]0, r[$.

Démonstration. Soit $l = \min\{n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0\}$, on a :

$$f(z) = \sum_{n \geq l} a_n z^n = z^l g(z)$$

avec $g(z) = a_l + a_{l+1} z + \ldots$ et $g(0) \neq 0$. ∎

Définition 1.3: Dérivée Complexe

Une fonction $f : U \to \mathbb{C}$ admet une dérivée par rapport à la variable complexe au point z_0 si

$$\lim_{z \to u} \frac{f(z_0 + u) - f(z_0)}{u}$$

existe. Cette limite est alors appelée dérivée de f en z_0.

Proposition 1.4: Dérivée d'une Série Entière

Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors, pour tout $l \in \mathbb{N}^\star$, les dérivées l-ièmes de f ont pour rayon de convergence R et pour expression :

$$f^{(l)}(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(n+l)!}{n!} a_{n+l} z^n$$

Corollaire 1.2: Primitive

Une série entière $f(z) = \sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ admet sur $D(0, R)$ une primitive complexe

$$F(z) = \sum \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$$

Proposition 1.5: S

it $f(z) = \sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Soit $z_0 \in D(0, R)$. La série entière

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \omega^n$$

a un rayon de convergence supérieur à $R - |z_0|$ et pour tout $z \in D(z_0, R - |z_0|)$,

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)(z - z_0)^n$$

1.2 Fonctions Analytiques

Définition 1.4: Fonction Analytique

Une fonction $f : U \to \mathbb{C}$ est dite analytique si elle est DSE au voisinage de chaque point de U.

Proposition 1.6: Dérivabilité

Une fonction analytique sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ admet des dérivées de tous ordres qui sont des fonctions analytiques sur U. De plus, pour tout $z_0 \in U$, f est somme de sa série de Taylor en z_0 sur un voisinage de z_0.

Corollaire 1.3: Unicité du DSE

Une fonction analytique sur U admet un unique développement en série entière au voisinage de chaque point de U.

Lemme 1.2: Nullité

Si U est connexe et f est analytique sur U, nulle sur un ouvert non-vide de U, alors f est identiquement nulle sur U.

Proposition 1.7: Zéros Isolés

oit f une fonction analytique sur un ouvert connexe U. Si f n'est pas identiquement nulle, ses zéros sont isolés, i.e. si $z_0 \in U$ avec $f(z_0) = 0$, alors il existe $r > 0$ tel que z_0 soit le seul z_0 de f sur $D(z_0, r)$

Théorème 1.1: Prolongement Analytique

Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, f, g des fonctions analytiques sur U. Si f, g coincident sur une partie Σ de U qui a un point d'accumulation dans U, alors elles coincident sur U.

Définition 1.5: Primitive

Etant donnée une fonction analytique f sur U, une fonction analytique F de U dans $\mathbb{C}$ est dite primitive de f si $F'(z) = f(z)$ sur U.

1.3 Détermination du Logarithme

Définition 1.6: Détermination de l'Argument

Soit $U \subseteq \mathbb{C}^\star$ ouvert. Une fonction continue $\arg : U \to \mathbb{R}$ est dite détermination continue de l'argument sur U si pour tout $z \in U$, $\exp(i \arg(z)) = \frac{z}{|z|}$

Définition 1.7: Détermination Principale

La détermination continue de l'argument

$$\begin{aligned} \mathbb{C} - \mathbb{R}_- &\longrightarrow \quad]-\pi, \pi[\\ z &\mapsto \quad 2\arctan\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right) \end{aligned}$$

en prenant la racine carrée de z appartenant au demi-plan $\Re z > 0$ est appelée détermination principale de l'argument.

Définition 1.8: Logarithme

Soit $U \subseteq \mathbb{C}^\star$ ouvert. Une fonction continue $f : U \to \mathbb{C}$ est dite détermination du logarithme sur U si

$$\forall z \in U, \exp\left(f\left(w\right)\right) = w$$

Définition 1.9: Détermination Principale du Log

On définit pour $\theta \in \mathbb{R}$ la fonction

$$\log_\theta : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_- e^{i\theta}, \log_\theta\left(w\right) = \log\left|w\right| + i \arg_\theta\left(w\right)$$

La fonction $\log_0$ est appelée détermination principale du logarithme et notée log.

Proposition 1.8: DSE du Logarithme

log est DSE sur $D\left(1,1\right)$ et sur $D\left(0,1\right)$ on a

$$\log\left(1+z\right) = \sum \frac{\left(-1\right)^{n+1}}{n} z^n$$

Par conséquent, sur $D\left(z_0, \left|z_0\right|\right)$,

$$g\left(z\right) = \log z_0 + i\theta_0 + \sum_{n \geq 1} \frac{\left(-1\right)^{n-1}}{n} \left(\frac{z-z_0}{z_0}\right)^n$$

est une détermination analytique du logarithme.

Proposition 1.9: Analycité des Déterminations

Il y a équivalence sur un ouvert connexe U de $\mathbb{C}^\star$ pour une application continue l entre :

- l est une détermination du logarithme à l'addition d'une constante près
- l est une primitive analytique de $\frac{1}{z}$ sur U.

Définition 1.10: Détermination

Soit $U \subseteq \mathbb{C}^\star$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. Une détermination continue de z^α est une application continue g de U dans $\mathbb{C}$ telle qu'il existe une détermination du logarithme $l\left(z\right)$ de z telle que $g\left(z\right) = \exp^{\alpha l\left(z\right)}$.

2 Théorie de Cauchy

2.1 Homotopie et Simple Connexité

Définition 2.1: Chemin

Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Un chemin $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ est une application continue. Le point $\gamma(a)$ est appelé origine et le point $\gamma(b)$ est dit extrémité. On orientera par défaut un chemin dans le sens des paramètres croissants. Si $\gamma(a) = \gamma(b)$, le chemin est dit lacet d'origine $\gamma(a)$.

Définition 2.2: Opérations

1. Si γ est constant, son image est réduite à un point. Il est alors appelé chemin (ou lacet) constant.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^\star$, $\gamma : t \in [0, 1] \mapsto e^{2i\pi\alpha t}$ est un chemin dont l'image est une partie du cercle unité $\partial D(0, 1)$. Si $\alpha = n \in \mathbb{Z}^\star$, $\gamma([0, 1])$ est le cercle tout entier parcouru n fois.
3. Si $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ est un chemin, le chemin opposé
$$\gamma^0 : t \in [a, b] \mapsto \gamma(a + b - t)$$
est γ parcouru en sens inverse.
4. La juxtaposition de γ_1, γ_2 tels que $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$ est le chemin $\gamma = \gamma_1 \wedge \gamma_2 : [a, d + b - c] \to \mathbb{C}$
$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{pour } a \leq t \leq b \\ \gamma_2(t - b + c) & \text{pour } b \leq t \leq d + b - c \end{cases}$$

Définition 2.3: Homotopie

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, $\gamma_i : I \to U$, $i \in \{1, 2\}$ deux chemins. Une homotopie de γ_1 à γ_2 dans U est une application continue φ de $I \times J$ dans U où $I = [a, b]$ et $J = [c, d]$ sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ telle que :
$$\varphi(t, c) = \gamma_1(t) \text{ et } \varphi(t, d) = \gamma_2(t), t \in I$$

Définition 2.4: Simple Connexité

Un espace topologique X connexe par arcs est dit simplement connexe si tout lacet dans X est homotope à un point dans X.

Proposition 2.1

- Un espace topologique est simplement connexe si et seulement si tous les chemins de même extrémités sont homotopes.
- Un ouvert étoilé par rapport à un point est simplement connexe. En particulier, dans $\mathbb{C}$, le plan, un demi-plan, un disque ouvert, l'intérieur d'un rectangle ou d'un triangle sont simplement connexes.
- Le demi-plan ouvert $\Im z > 0$ auquel nous ôtons un nombre fini de demi-droites fermées $z = t + i\beta_k$, $t \in \left]-\infty, \alpha_k\right]$ est simplement connexe non étoilé.
- $\mathbb{C}^\star$ n'est pas simplement connexe car le cercle unité n'est pas homotope à un chemin constant.

2.2 Intégrales sur un Chemin

Dorénavant, les chemins sont supposés $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

Définition 2.5: Equivalence de Chemins

Deux chemins $\gamma_i : I_i \to \mathbb{C}$ sont dits équivalents s'il existe une bijection croissante $\varphi : I_2 \to I_1$ continue de réciproque continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux telle que :

$$\gamma_2(t) = \gamma_1(\varphi(t)), t \in I_2$$

Définition 2.6: Intégrale le long d'un Chemin

Soit $f : U \to \mathbb{C}$ continue et $\gamma : I = [a, b] \to \mathbb{C}$ un chemin avec $\gamma(I) \subseteq U$. Alors, la fonction $t : f(\gamma(t))\gamma'(t)$ est continue par morceaux dans $[a, b]$. On appelle intégrale de f le long du chemin γ :

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t$$

Définition 2.7: Longueur

La longueur d'un chemin est le réel :

$$long(\gamma) = \int_a^b \left|\gamma'(t)\right|\,\mathrm{d}t$$

Proposition 2.2: Propriétés

- Si F est une primitive de f, pour tout chemin γ :
$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$
- Si $\gamma_1 \sim \gamma_2$ alors
$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$$
- Si $[Z_0, z_1] \subseteq U$, nous notons $\int_{[z_0,z_1]} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ où $\gamma : t \in [0,1] \mapsto (1-t)\,z_0 + tz_1$.
- Si $\partial D(z_0, r) \subseteq U$, soit le lacet $\gamma : \theta \in [0, 2\pi] \mapsto z_0 + re^{i\theta}$. On a :
$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\partial D(z_0,r)} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{i\theta}\right) ire^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta$$
- En séparant parties réelles et imaginaires, $f = P + iQ$ et $\gamma = u + iv$, on a :
$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_a^b \left((P\circ\gamma)\,u' - (Q\circ\gamma)\,v'\right)\mathrm{d}t + i\int_a^b \left((Q\circ\gamma)\,u' + (P\circ\gamma)\,u'\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_\gamma (P\,\mathrm{d}x - Q\,\mathrm{d}y) + i\int_\gamma (P\,\mathrm{d}y + Q\,\mathrm{d}x)\end{aligned}$$
- On a :
$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{\gamma^0} f(z)\,\mathrm{d}z$$
- On a :
$$\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq long(\gamma)\max_\gamma |f|$$

2.3 Théorème de Cauchy

Théorème 2.1: de Cauchy

Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert connexe et f une fonction analytique dans U. Si γ_1, γ_2 sont deux lacets homotopes dans U, alors
$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z$$
En particulier, si U est simplement connexe, l'intégrale sur un lacet de f est nulle.

Théorème 2.2: Primitives Analytiques

Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe.

1. Toute fonction analytique dans U admet une primitive.
2. Si $f : U \to \mathbb{C}^\star$ est analytique, alors il existe $g : U \to \mathbb{C}$ analytique tel que $\exp(g) = f$ sur U.

2.4 Formule de Cauchy

Lemme 2.1: Intégrité de l'Indice

Soit $\gamma : I = [c, d] \to \mathbb{C}$ un lacet et $a \notin \gamma(I)$. Alors

$$j(a, \gamma) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z - a} \in \mathbb{Z}$$

Démonstration. Pour $t \in [c, d]$ on pose

$$h(t) = \int_c^t \frac{\gamma'(s)\,\mathrm{d}s}{\gamma(s) - a}$$

On a $h'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-a}$, sauf en un nombre fini de points de I.
Remarquons que $g(t) = e^{-h(t)}(\gamma(t) - a)$ a pour dérivée

$$g'(t) = -h'(t)\,e^{-h(t)}(\gamma(t) - a) + \gamma'(t)\,e^{-h(t)} = 0$$

sauf en un nombre fini de points de I. Comme g est continue, elle est constante et $g(c) = g(d)$. Or, $h(c) = 0$ donc $g(c) = \gamma(c) - a = g(d) = e^{-h(d)}(\gamma(d) - a)$. Mais γ est un lacet, donc $\gamma(c) = \gamma(d)$. Donc $h(d) = 2in\pi$. Donc $j(a, \gamma) = n \in \mathbb{Z}$. ■

Définition 2.8: Indice

L'entier $j(a, \gamma)$ est appelé indice de a par rapport au lacet γ et s'interprète comme le nombre de fois que le lacet tourne autour de a lorsque a est intérieur au lacet.

Proposition 2.3: Propriétés

1. Soit $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ des lacets de même origine dont les lacets ne contiennent pas a. Alors,

$$j\left(a, \gamma^0\right) = -j(a, \gamma) \text{ et } j(a, \gamma_1 \wedge \gamma_2) = j(a, \gamma_1) + j(a, \gamma_2)$$

2. En appliquant le théorème de Cauchy à la fonction analytique $1/(z - a)$ dans $\mathbb{C} - \{a\}$, nous obtenons $j(a, \gamma_1) = j(a, \gamma_2)$ si γ_1, γ_2 sont homotopes dans $\mathbb{C} - \{a\}$.
3. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe et $\gamma \subset U$. Si $a \notin U$, alors $j(a, \gamma) = 0$.
4. Si γ set un lacet dans $\mathbb{C}$, pour tout ouvert connexe U de $\mathbb{C} - \gamma(I)$, la fonction $z \mapsto j(z, \gamma)$ est constante dans U.
5. Soit $\gamma_n : t \mapsto e^{int}$, on a :

$$j(z_0, \gamma_n) = \begin{cases} n & si\,|z_0| < 1 \\ 0 & si\,|z_0| > 1 \end{cases}$$

Démonstration du point iv. Soit $z \in D(z_0, r) \subseteq U$,

$$j(z, \gamma) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}u}{u - z} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_1} \frac{\mathrm{d}u}{u - z} = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}u}{u - z_0} = j(z_0, \gamma)$$

pour $\gamma_1 : t \mapsto \gamma(t) + (z - z_0)$ qui est homotopie à γ via

$$\varphi(t, s) = \gamma(t) + s(z - z_0), 0 \leq s \leq 1$$

Donc $j(\cdot, \gamma)$ est localement constante donc constante sur U connexe. ■

Théorème 2.3: Formule de Cauchy

Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe, $\gamma : I \to U$ un lacet dans U. Soit f analytique sur U. Pour tout $w \in U \setminus \gamma(I)$

$$j(w,\gamma) f(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-w} \,\mathrm{d}z$$

Démonstration. La fonction

$$g : z \in U \mapsto \begin{cases} \frac{f(z)-f(w)}{z-w} & \text{si } z \neq w \\ f'(w) & \text{si } z = w \end{cases}$$

est analytique sur U. En effet pour $r > 0$ assez petit, f admet un développement de Taylor sur $D(w,r) \subseteq U$ et donc pour $z \in D(w,r)$:

$$g(z) = f'(w) + \frac{f''(w)}{2!}(z-w) + \cdot + \frac{f^{(n)}(w)}{n!}(z-w)^{n-1} + \cdot$$

Comme U est simplement connexe, le théorème de Cauchy donne $\int_\gamma g = 0$ et comme $w \notin \gamma(I)$, $\int_\gamma \frac{f(z)-f(w)}{z-w} \,\mathrm{d}z = 0$ c'est à dire :

$$\int_\gamma \frac{f(z)\,\mathrm{d}z}{z-w} = f(w) \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-w} = 2i\pi j(w,\gamma) f(w)$$

■

Corollaire 2.1: Valeur en un point

On a :

$$f(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(z_0,r)} \frac{f(z)}{z-w} \,\mathrm{d}z, w \in D(z_0,r)$$

Proposition 2.4: Continuité sur un Lacet

Soit $\gamma : I = [c,d] \to \mathbb{C}$ un lacet et $g : \gamma(I) \to \mathbb{C}$ une fonction définie et continue sur $\gamma(I)$. Alors :

$$f(z) = \int_\gamma \frac{g(u)\,\mathrm{d}u}{u-z}$$

est définie et analytique dans $\mathbb{C} \setminus \gamma(I)$.
Précisément, pour tout $w \in \mathbb{C} \setminus \gamma(I)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et

$$c_n = \int_\gamma \frac{g(u)\,\mathrm{d}u}{(u-w)^{n+1}}$$

nous avons un développement en série entière convergente

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} c_n (z-w)^n$$

dans tout disque ouvert de centre w et de rayon $r = d(w, \gamma(I))$ et

$$f^{(n)}(w) = n! c_n = n! \int_\gamma \frac{g(u)\,\mathrm{d}u}{(u-w)^{n+1}}$$

Démonstration. Pour tout $u \in \gamma(I), z \in D(w, qr), q \in [0,1]$, la série

$$\frac{1}{u-z} = \frac{1}{u-w}\frac{1}{1-\frac{z-w}{u-w}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-w)^n}{(u-w)^{n+1}}$$

est convergente. Comme $(g \circ \gamma)\gamma'$ est continue par morceaux sur $[c,d]$ il existe M tel que

$$|g(\gamma(t))\gamma'(t)| \leq M$$

Donc :

$$\left| g(\gamma(t))\gamma'(t) \frac{(z-w)^n}{(\gamma(t)-w)^{n+1}} \right| \leq M\frac{q^n}{r}, t \in [c,d]$$

Finalement, la série sous l'intégrale est normalement convergente et :

$$f(z) = \int_c^d \frac{g(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t}{\gamma(t)-z} = \int_c^d g(\gamma(t))\gamma'(t)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-w)^n}{(\gamma(t)-w)^{n+1}}\right)\mathrm{d}t$$

et donc $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-w)^n$ ■

Proposition 2.5: Dérivée n-ième

Soit f analytique sur U et γ le bord de $\overline{D}(w,r) \subseteq U$. D'après la formule de Cauchy :

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} \frac{f\left(w+re^{it}\right)}{e^{nit}}\,\mathrm{d}t$$

Corollaire 2.2

1. Soit f analytique sur U. Pour tout $a \in U$, la série de Taylor de f au voisinage de a est convergente et a pour somme $f(z)$ dans le plus grand disque ouvert de centre a contenu dans U
2. Si f est analytique sur $\mathbb{C}$, sa série de Taylor en tout point de $\mathbb{C}$ est convergente sur $\mathbb{C}$.

Démonstration. On applique la formule de Cauchy sur le contour γ d'un disque $D(a,r)$ contenu dans U. Pour $z \in D(a,r), j(z,\gamma) = 1$ et

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}z$$

La proposition 2.4 donne un développement en série entière de f en $z-a$ convergeant sur $D(a,r)$. Par unicité du développement, il s'agit de la série de Taylor. En faisant tendre r vers $d(a, \mathbb{C}-U)$, nous obtenons le résultat annoncé. ■

Corollaire 2.3: Constance Locale

Supposons U connexe, $a \in U$ et $f : U \to \mathbb{C}$ analytique. Si pour tout $k > 0, f^{(k)}(a) = 0$, alors f est constante sur U.

Démonstration. D'après le corollaire 2.2, f est localement somme de sa série de Taylor. Donc f est constante sur un ouvert contenant a. Soit $\Omega = \{w \in U, \forall k > 0, f^{(k)}(w) = 0\}$. Cet ensemble est ouvert, non vide, et fermé. Par connexité de U, $\Omega = U$, $f' = 0$ sur U et f est constante sur U. ■

Théorème 2.4: Multiplicité

Soit $f : U \to \mathbb{C}$ analytique non constante au voisinage de $a \in U$. Si $f(a) = 0$, il existe un unique entier $m \geq 1$ et $g : V \to \mathbb{C}$ analytique sur un voisinage V de a tels que

$$f(z) = (z-a)^m g(z), g(a) \neq 0, z \in V$$

En particulier, le point a possède un voisinage dans lequel il est l'unique zéro de f.

Démonstration. D'après le corollaire 2.3, si f n'est pas constante dans un voisinage de a, il existe $m \geq 1$ tel $f^{(m)}(a) \neq 0$ et $f'(a) = \ldots = f^{(m-1)}(a) = 0$.
Comme $f(a) = 0$, on peut alors factoriser $(z-a)^m$ dans le développement en série de Taylor de f en a. ∎

Définition 2.9: Ordre

L'entier m du théorème précédent est dit ordre de f en a, noté $ord(f, a)$.

2.5 Inégalités de Cauchy, Premières Applications

Proposition 2.6: Inégalités de Cauchy

Soit $f : U \to \mathbb{C}$ analytique, $\overline{D}(w, r) \subset U, r > 0$. On a, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\left|f^{(n)}(w)\right| \leq \frac{n!}{r^n} \sup_{z \in \partial D(w,r)} |f(z)|$$

Démonstration. On a :

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} \frac{f\left(w + re^{it}\right)}{e^{nit}} \, \mathrm{d}t$$

On en déduit immédiatement le résultat. ∎

Lemme 2.2: Bornitude et Polynomialité

Soit f analytique sur $\mathbb{C}$. Supposons qu'il existe $A, B \geq 0$ tels que

$$\forall z \in \mathbb{C}, |f(z)| \leq A(1 + |z|)^B$$

Alors f est un polynôme de degré $\leq B$.

Démonstration. Soit $n \geq \lfloor B \rfloor + 1 > B$. Par les inégalités de Cauchy, puisque

$$\sup_{\partial D(z,r)} |f(z)| \leq A(1 + |z| + r)^B$$

on a :

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \leq \frac{n!}{r^n} A(1 + |z| + r)^B$$

En faisant tendre r vers $+\infty$, par croissance comparée, $f^{(n)}(w) = 0$ pour $n \geq B$. Localement, f étant somme de sa série de Taylor, c'est localement un polynôme de degré au plus B, ce qui est donc le résultat. ∎

Théorème 2.5: Liouville

Une fonction analytique bornée sur $\mathbb{C}$ est constante.

Théorème 2.6: d'Alembert-Gauss

Tout polynôme $P \in \mathbb{C}[z]$ de degré ≥ 1 admet une racine dans $\mathbb{C}$.

Démonstration. Par l'absurde, si $P(z) = \sum_{i=0}^{d} a_i z^i$ ne s'annule pas, $f = 1/P$ est analytique sur $\mathbb{C}$ et $|f(z)| \sim \frac{1}{|a_d||z|^d}$ tend vers 0 quand $|z|$ tend vers $+\infty$. En particulier, f est bornée sur $\mathbb{C}$ donc constante d'après le théorème de Liouville. Ainsi, $P = 1/f$ est constant, ce uqui est absurde. ■

Théorème 2.7: Topologie

Les ouverts $\mathbb{C}$ et $D(0,1)$ sont homéomorphes mais pas isomorphes.

3 Fonctions Holomorphes

3.1 Définitions

Définition 3.1: Holomorphie

Une fonction $f : U \to \mathbb{C}$ est dite holomorphe en $z_0 \in U$ si la limite

$$\lim_{h \in \mathbb{C} \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

existe. On la note $f'(z_0)$.
On définit $\mathcal{O}(U)$ l'ensemble des fonctions holomorphes.

Proposition 3.1: Exemples Holomorphe

- Si f est constante, f est holomorphe et $f' = 0$
- Si f est un polynôme, f est holomorphe
- Si f est analytique, f est holomorphe
- $\sin, \cos, \exp, \tan$ sont holomorphes sur $\mathbb{C}$.
- $z \mapsto \bar{z}$ n'est pas holomorphes en aucun point :

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{\bar{h}}{h}$$

  n'a pas de limite en 0.
- $f(z) = |z|^2$ n'est holomorphe que pour $z = 0$:

$$\frac{(z+h)\left(\bar{z}+\bar{h}\right) - z\bar{z}}{h} = \frac{h\bar{z} + \bar{h}z + h\bar{h}}{h}$$

  n'a une limite que si $z = 0$.

3.2 Différentiabilité

Définition 3.2: Forme Différentielle

Une 1-forme différentielle sur Ω est une application $\alpha : \Omega \to Hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.
En particulier, les $\mathrm{d}x_i \in Hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ qui à $a \mapsto \mathrm{d}x_i(a) = a_i$ permettent d'écrire :

$$\alpha(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)\,\mathrm{d}x_i$$

où $\alpha_i : \Omega \to \mathbb{C}$. On a alors :

$$\alpha(x)(a) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)\,\mathrm{d}x_i(a)$$

On dit que α est de classe $\mathcal{C}^k$ si et seulement si tous les α_i sont de classe $\mathcal{C}^k$.

Définition 3.3: $\mathbb{R}$ Différentiabilité

Une fonction f d'un ouvert connexe Ω de $\mathbb{R}^n$ est dite $\mathbb{R}$-différentiable sur Ω si et seulement si il existe une 1-forme différentielle $\mathrm{d}f : \Omega \to Hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ telle que

$$f(z+h) = f(z) + \mathrm{d}f(z)(h) + o(h)$$

On pose $\mathrm{d}_x f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\,\mathrm{d}x_i$.

Dans la suite on travaille dans $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ et pour $h \in \mathbb{C}$, on note $h = k + il = (k, l)$ et pour $z \in U = \Omega$, $z = x + iy = (x, y)$.

Proposition 3.2: Différentielle dans une base

Soit $f : U \to \mathbb{C}$ différentiable de différentielle $\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$. On a $\forall z \in U$:

$$\mathrm{d}_z f = \frac{\partial f}{\partial x}(z)\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(z)\,\mathrm{d}y$$

En $h = k + il$:

$$\mathrm{d}_z f(h) = \frac{\partial f}{\partial x}(z)\,k + \frac{\partial f}{\partial y}(z)\,l$$

On définit

$$\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y \text{ et } \mathrm{d}\bar{z} = \mathrm{d}x - i\,\mathrm{d}y$$

On a alors :

$$\mathrm{d}f = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}z + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}\bar{z}$$

ce qu'on écrit aussi :

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\mathrm{d}\bar{z}$$

On a par ailleurs

$$\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}$$

Proposition 3.3: Exemples

1. Si $f(z) = z$, $\frac{\partial z}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z} = 1$ et $\frac{\partial z}{\partial \bar{z}} = 0$. A l'inverse, $\frac{\partial \bar{z}}{\partial z} = 0$.
2. Pour $P(x,y) = \sum_{0 \leq \alpha, \beta \leq d} c_{\alpha,\beta} x^\alpha y^\beta$. En notant $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$ et $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$, on a :

$$P(z) = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} z^\alpha \bar{z}^\beta$$

où on a

$$a_{\alpha,\beta} = \frac{1}{\alpha!\beta!} \frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial z^\alpha \partial z^\beta} P(0)$$

On retrouve que P est holomorphe si on a $a_{\alpha,\beta} = 0$ pour $\beta \geq 1$.

Théorème 3.1: Lien $\mathbb{C}$-dérivabilité et $\mathbb{R}$-différentiabilité

Soit $f : U \to \mathbb{C}$. On a équivalence entre :

1. $f \in \mathcal{O}(U)$
2. f est $\mathbb{R}$-différentiable sur U et $\mathrm{d}_z f$ est $\mathbb{C}$-linéaire pour tout $z \in U$
3. f est $\mathbb{R}$-différentiable sur U et $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ pour tout $z \in U$

Démonstration. $i \Rightarrow ii$ $f(z+h) = f(z) + hf'(z) + o(h) \implies f$ est $\mathbb{R}$-différentiable en z et $\mathrm{d}_z f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ qui à $h \mapsto hf'(z)$ est $\mathbb{C}$-linéaire.

$ii \Rightarrow iii$ On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_z f(h) =& \frac{\partial f}{\partial z}(z)\, \mathrm{d}z(h) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z)\, \mathrm{d}\bar{z}(h) \\
=& \frac{\partial f}{\partial z}(z)\, h + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z)\, \bar{h} \\
\mathrm{d}_z f(h) =& \frac{\partial f}{\partial z} h + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \bar{h}
\end{aligned}$$

On a alors : $\mathrm{d}_z f(ih) = \frac{\partial f}{\partial z} ih - i\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \bar{h}$. Mais $\mathrm{d}_z f$ est $\mathbb{C}$-linéaire par hypothèse. Donc :

$$\mathrm{d}_z f(ih) = i\, \mathrm{d}_z f(h) = i\frac{\partial f}{\partial z} h + i\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \bar{h}$$

Ainsi : $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = -\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

$iii \Rightarrow i$ On a :

$$\mathrm{d}_z f(h) = \frac{\partial f}{\partial z} h$$

D'où

$$f(z+h) = f(z) + \frac{\partial f}{\partial z} h + o(h)$$

Ainsi :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{\partial f}{\partial z}$$

et f est holomorphe en z.

■

Proposition 3.4: Équations de Cauchy-Riemann

On note $f(x+iy) = P(x,y) + iQ(x,y)$ où $P, Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Si f est holomorphe, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

i.e.

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} & = & 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} & = & 0 \end{cases}$$

Ce sont les équations de Cauchy-Riemann.

Démonstration. On a :

$$\mathrm{d}_z f(h) = \frac{\partial f}{\partial x}(z)\,\mathrm{d}x(h) + \frac{\partial f}{\partial y}(z)\,\mathrm{d}y(h) = f'(z)h = f'(z)(k+il)$$

On obtient

$$f'(z)(k+il) = \frac{\partial f}{\partial x}(z)k + \frac{\partial f}{\partial y}(z)l$$

et donc :

$$\begin{cases} f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(z) \\ if'(z) = \frac{\partial f}{\partial y}(z) \end{cases}$$

On obtient ainsi la première égalité en identifiant.
On réécrit ceci avec $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$:

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} & = & 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} & = & 0 \end{cases}$$

■

Proposition 3.5: Constance sur un Connexe

Si f est holomorphe sur U connexe on a équivalence entre :

- f est constante sur U
- $\Re f$ l'est
- $\Im f$ l'est
- $|f|$ l'est
- $\bar{f}$ est holomorphe

3.3 Intégrale sur le bord d'un Compact

Définition 3.4: Classe du Bord d'un Compact

Soit K un compact de $\mathbb{R}^2$. K est dit à bord compact de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux si pour tout élément $z_0 \in \partial K$, il existe des coordonnées (u,v) associées à un repère affine de $\mathbb{R}^2$ d'origine z_0 orienté positivement par rapport à l'orientation canonique de $\mathbb{R}^2$ et un rectangle ouvert $R = \{-\delta < u < \delta\} \times \{-\eta < v < \eta\}$ tel que :

$$K \cap R = \{(u,v) \in R, v \geq h(u)\}$$

où h est une fonction réelle $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[-\delta, \delta]$ avec $h(0) = 0$ et $\sup|h| < \eta$.

Définition 3.5: Orientation du Bord

Soit K un compact à bord de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. On appelle orientation canonique du bord l'orientation donnée par les arcs $u \mapsto (u, h(u))$ avec u croissant.

Lemme 3.1: Existence de l'Orientation

La définition a du sens.

Lemme 3.2: Recoupement de Rectangles

Soit R, R' des rectangles ouverts tels que $\partial K \cap R \cap R' \neq \varnothing$.
On définit

$$K \cap R = \{(u, v) \in R, v \geq h(u)\}$$

et

$$K \cap R' = \{(u', v') \in R', v' \geq l(u')\}$$

Alors, les orientations sur $\partial K \cap R \cap R'$ coïncident.

Démonstration. Soit $z_0 \in \partial K \cap R \cap R'$. h et l sont $\mathcal{C}^1$ par morceaux. En évitant un nombre fini de points de $\partial K \cap R \cap R'$ on peut supposer h et l $\mathcal{C}^1$ en z_0. Autrement dit, le bord admet une tangente en z_0. On a deux repères affines orientés (z_0, e_1, e_2) et (z_0, e_1', e_2') qui génèrent des coordonnées (u, v) et (u', v'). Quitte à remplacer h par $h(u) - h'(0)\, u$ on peut supposer que $h'(0) = l'(0) = 0$. Ainsi, e_1 et e_1' sont colinéaires. Puisqu'on a supposé que (e_1, e_2) et (e_1', e_2') sont orientés positivement par rapport à l'orientation canonique de $\mathbb{R}^2$ et puisque e_2 et e_2' doivent être dans le même sens (i.e. à l'intérieur du compact), on a bien le fait que e_1 et e_1' sont dans le même sens.
Finalement, les orientations sur $\partial K \cap R \cap R'$ coïncident. ∎

3.4 Formule de Green-Riemann

Soit $p, n \in \mathbb{N}^*$. On note $\Lambda_{\mathbb{R}}^p(\mathbb{R}^n)$ le $\mathbb{R}$-ev des formes p-linéaires alternées sur $\mathbb{R}^n$. Toute forme $S \in \Lambda_{\mathbb{R}}^p(\mathbb{R}^n)$ s'écrit de manière unique

$$S = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} c_{i_1, \ldots, i_p} \, \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_p}$$

Définition 3.6: Produit Extérieur

Pour $S \in \Lambda_{\mathbb{R}}^p(\mathbb{R}^n), T \in \Lambda_{\mathbb{R}}^q(\mathbb{R}^n)$ on définit le produit extérieur de S et T noté $S \wedge T \in \Lambda_{\mathbb{R}}^{p+q}(\mathbb{R}^n)$ comme :

$$S \wedge T(v_1, \ldots, v_{p+q}) = \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma)\, S\left(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}\right) T\left(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)}\right)$$

Proposition 3.6: Exemples

La paire $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$ forme une base de $\Lambda_{\mathbb{R}}^1(\mathbb{C})$. Les seuls produits extérieurs à considérer sont :

$$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}x = \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}y = 0, \quad \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = -\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x$$

De plus, $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ est la forme bilinéaire alternée déterminant dans la base canonique.

Définition 3.7: 2-forme différentielle

Une 2-forme différentielle β sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ est une application continue de U dans $\Lambda^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$: $\beta = w(x,y)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ pour w continue.

Définition 3.8: Intégrale d'une 2-forme

Soit $\beta = w(x,y)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ une 2-forme différentielle sur U. On définit :

$$\int_U \beta = \int_U w(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Définition 3.9: Différentielle d'une Différentielle

Soit $\alpha = u(x,y)\,\mathrm{d}x + v(x,y)\,\mathrm{d}y$ une 1-forme différentielle $\mathcal{C}^1$ sur U. La différentielle $\mathrm{d}\alpha$ de α est la 2-forme différentielle

$$\mathrm{d}\alpha = \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}v \wedge \mathrm{d}y = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

Proposition 3.7: Exemples

1. Soit α une 1-forme différentielle sur U et $f : U \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Alors

$$\mathrm{d}(f\alpha) = \mathrm{d}f \wedge \alpha + f\,\mathrm{d}\alpha$$

2. Si on écrit la 1-forme différentielle $\mathcal{C}^1$ $\alpha = f\,\mathrm{d}z + g\,\mathrm{d}\bar{z}$ on a :

$$\mathrm{d}(f\,\mathrm{d}z + g\,\mathrm{d}\bar{z}) = (\partial_z g - \partial_{\bar{z}} f)\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z} = -2i(\partial_z - \partial_{\bar{z}} f)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

En particulier, si $\alpha = f\,\mathrm{d}z$ avec f holomorphe, alors $\partial_{\bar{z}} f = 0$ et $\mathrm{d}\alpha = 0$.

Lemme 3.3: Formule de Green-Riemann sur un rectangle

Soit K un compact de $\mathbb{C}$ à bord de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux orienté canoniquement. Soit $\alpha = u(x,y)\,\mathrm{d}x + v(x,y)\,\mathrm{d}y$ une forme 1-différentielle de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de K à support dans un rectangle $R = [-\delta, \delta] \times [-\eta, \eta] \subseteq K$. Alors

$$\int_{\partial K} \alpha = \int_K \mathrm{d}\alpha \text{ i.e. } \int_{\partial K} u(x,y)\,\mathrm{d}x + v(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_K \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Démonstration. Comme K est compact, $R \subseteq \mathring{K}$ ou bien $\partial K \cap R$ est le graphe d'une fonction h et $K \cap R$ est la partie située à l'intérieur du graphe.
Supposons $R \subseteq \mathring{K}$, alors $u = v = 0$ sur ∂R et

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}x = v(\delta, y) - v(-\delta, y) = 0$$

$$\int_{-\eta}^{\eta} \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}y = u(x, \eta) - u(x, -\eta) = 0$$

et

$$\int_K \mathrm{d}\alpha = \int_R \mathrm{d}\alpha = \int_{-\delta \le x \le \delta, -\eta \le y \le \eta} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$$

Puisque le support de α ne rencontre pas ∂K on a $\int_{\partial K} \alpha = 0 = \int_K \mathrm{d}\alpha$.
Si $K \cap R = \{(x, y) \in R \mid y \leq h(x)\}$, alors

$$\int_K \mathrm{d}\alpha = \int_{K\cap R} \mathrm{d}\alpha = \int_{-\delta}^{\delta} \mathrm{d}x \int_{h(x)}^{\eta} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \mathrm{d}y$$

$$= \int_{-\delta}^{\delta} \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_{h(x)}^{\eta} v(x, y)\ \mathrm{d}x\right) + v(x, h(x))\, h'(x) - (u(x, \eta) - u(x, h(x)))\right) \mathrm{d}x$$

$$= \int_{h(\delta),\eta} v(\delta, y)\ \mathrm{d}y - \int_{h(-\delta)}^{\eta} v(-\delta, y)\ \mathrm{d}y + \int_{-\delta}^{\delta} (v(x, h(x))\, h'(x) + u(x, h(x)))\ \mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\delta}^{\delta} (v(x, h(x))\, h'(x) + u(x, h(x)))\ \mathrm{d}x$$

car $u(x, \eta) = v(\delta, y) = v(-\delta, y) = 0$. Par ailleurs, comme $\partial K \cap R$ est paramétré par $y = h(x)$,

$$\int_{\partial K\cap R} \alpha = \int_{\partial K \cap R} u(x, y)\ \mathrm{d}x + v(x, y)\ \mathrm{d}y = \int_{-\delta}^{\delta} (v(x, h(x))\, h'(x) + u(x, h(x)))\ \mathrm{d}x$$

Le support de α est inclus dans R. Nous concluons donc :

$$\int_K \mathrm{d}\alpha = \int_{\partial K} \alpha$$

■

Définition 3.10: Partition de l'unité

Soit K un compact de $\mathbb{C}$ recouvert par un nombre fini d'ouverts U_i. Une partition de l'unité de classe $\mathcal{C}^1$ subordonnée au recouvrement U_i est une famille φ_i de fonctions de K dans $[0, 1]$ de classe $\mathcal{C}^1$ à support dans U_i telles que $\sum \varphi_i(x) = 1$ pour tout $x \in K$.

Lemme 3.4: Unité sur un Voisinage

Soit $z \in U$. Il existe V un voisinage de z avec $\overline{V} \subseteq U$ et une fonction $\mathcal{C}^1$ φ_U à support dans U valant 1 sur V.

Démonstration. Soit $r > r' > 0$ tel que $D(z, r') \subset D(z, r) \subset U$. On définit les fonctions $\mathcal{C}^\infty$

$$f_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_r(t) = \begin{cases} e^{\frac{1}{t^2 - r^2}} & \text{si } |t| < r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$g_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g_r(s) = \frac{\int_{-\infty}^{s} f_r(t)\ \mathrm{d}t}{\int_{-\infty}^{\infty} f_r(t)\ \mathrm{d}t}$$

En particulier :

$$g_r(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s \leq -r \\ 1 & \text{si } s \geq r \end{cases}$$

Alors, $V = D(z, r')$ et $\varphi_U(w) = f_r\left(r + \frac{2r}{r - r'}(r' - |w - z|)\right)$ conviennent. ■

Lemme 3.5: Existence d'une Partition

Soit $K \subseteq \mathbb{C}$ un compact et (U_i) un recouvrement fini par des ouverts de K. Il existe une partition de l'unité $\mathcal{C}^1$ subordonnée au recouvrement U_i

Démonstration. Pour tout $z \in K \setminus U_j$ il existe i tel que $z \in U_i$. Par le lemme 3.4 on constuit ψ_z^j de classe $\mathcal{C}^1$ qui vaut 1 sur un voisinage ouvert W_z^j de z et dont le support est dans l'ouvert $U_i \cap (K \setminus U_j)$. Le support de ψ_z^j est un fermé de K donc est compact.
On obtient donc un recouvrement ouvert W_z^j du compact $K \setminus U_j$ donc on extrait un sous-recouvrement fini $\left\{W_{z_1}^j, \ldots, W_{z_{j_l}}^j\right\}$.
On procède de même pour tout $j \leq n$. En réindexant on obtient une famille finie $(\psi_l)_{1 \leq l \leq N}$ de fonctions dont l'union des supports recouvre K, i.e. pour tout $z \in K$, il existe l tel que $\psi_l(z) > 0$.
On pose alors

$$\psi = \sum \psi_l \text{ et pour } l \leq N, \rho_l = \frac{\psi_l}{\psi}$$

Ainsi, ρ_l est une partition de l'unité de classe $\mathcal{C}^1$ de K telle que pour tout l il existe $1 \leq i \leq n$ tel que le support de ρ_l soit inclus dans U_i. ■

Théorème 3.2: Formule de Green-Riemann

Soit K un compact de $\mathbb{C}$ à bord de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux orienté canoniquement. Soit α une 1-forme différentielle de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de K. On a alors

$$\int_{\partial K} \alpha = \int_K \mathrm{d}\alpha$$

Démonstration. Comme K est compact, il est recouvert par un nombre fini de rectangles ouverts R_j qui vérifient $R_j \subseteq \mathring{K}$ ou $\partial(K \cap R_j)$ est le graphe d'une fonction h_j et $K \cap R_j$ est la partie située à l'intérieur du graphe. Soit (χ_j) une partition de l'unité subordonnée au recouvrement R_j. Écrivons $\alpha = \sum \alpha_j$ où les 1-formes différentielles $\alpha_j = \chi_j \alpha$ sont de classes $\mathcal{C}^1$ à support dans R_j. On se ramène alors au cas du lemme 3.3 ■

Théorème 3.3: Cauchy

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, K un compact à bord de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux inclus dans U, avec l'orientation canonique du bord. Alors pour toute fonction holomorphe de classe $\mathcal{C}^1$ sur K nous avons

$$\int_{\partial K} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Démonstration. On applique la formule de Green-Riemann 3.2 à $\alpha = f(z)\,\mathrm{d}z$, 1-forme différentielle de classe $\mathcal{C}^1$. On a $\mathrm{d}\alpha = -\partial_{\bar{z}} f\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z} = 0$. ■

Corollaire 3.1: Analycité Holomorphe $\mathcal{C}^1$

Soit f holomorphe de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U. Alors f est analytique sur U.

Démonstration. Soit $\overline{D}(w, r) \subseteq U$ et γ le lacet $t \mapsto w + re^{it}$. Pour $\lambda \leq 1$, on pose

$$g(\lambda) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z + \lambda(u - z))}{u - z}\,\mathrm{d}u = \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f\left(z + \lambda\left(w + re^{it} - z\right)\right)}{w + re^{it} - z} e^{it}\,\mathrm{d}t$$

Ainsi, g est continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$ de dérivée

$$g'(\lambda) = \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'\left(z + \lambda\left(w + re^{it} - z\right)\right) e^{it}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2i\pi\lambda} f\left(z + \lambda\left(w + re^{it} - z\right)\right)\right]_{t=0}^{2\pi} = 0$$

Donc g est constante avec

$$g(1) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(u)\,\mathrm{d}u}{u - z} \text{ et } g(0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)\,\mathrm{d}u}{u - z} = f(z)$$

D'où, par la proposition 2.4, f est analytique ■

3.5 Analycité des Fonctions Holomorphes

Lemme 3.6: Goursat

Soient $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert et T un triangle inclus dans U. Pour tout fonction holomorphe sur U

$$\int_{\partial T} f(z)\, \mathrm{d}z = 0$$

Démonstration. Nous découpons T en quatre triangles T_i dont les sommets sont ceux de T et les milieux des côtés de T. Nous orientons les arêtes opposées des triangles T_k de telle façon que

$$I = \int_{\partial T} f(z)\, \mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{4} \int_{\partial T_k} f(z)\, \mathrm{d}z$$

Il existe donc un indice k avec $\left|\int_{\partial T_k} f(z)\, \mathrm{d}z\right| \geq |I|/4$. De cette façon, nous construisons une suite de triangles emboîtés $T_0' = T, T_1' = T_k$ avec $diamT_n' = diamT/2^n$ et $\left|\int_{\partial T_n'} f(z)\, \mathrm{d}z\right| \geq |I|/4^n$. L'intersection des triangles emboîtés T_n' est réduite à un point z_0. Comme f est holomorphe en z_0 :

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0) f'(z_0) + (z - z_0)\varepsilon(z)$$

avec $\varepsilon(z)$ qui tend vers 0 quand z tend vers z_0. On a ainsi :

$$\left|\int_{\partial T_n'} f(z)\, \mathrm{d}z\right| = \left|\int_{\partial T_n'} (z - z_0)\varepsilon(z)\, \mathrm{d}z\right| \leq \operatorname{long}(\partial T_n') \sup_{\partial T_n'} |z - z_0| |\varepsilon(z)|$$

et donc

$$\left|\int_{\partial T_n'} f(z)\, \mathrm{d}z\right| \leq 3 (\mathrm{diam}T_n')^2 \sup_{\partial T_n'} |\varepsilon(z)|$$

Donc $|I| \leq 4^n \left|\int_{\partial T_n'} f(z)\, \mathrm{d}z\right| \leq 3 (\mathrm{diam}T_n)^2 \sup_{\partial T_n'} |\varepsilon(z)|$ et donc $I = 0$. ∎

Théorème 3.4: Goursat

Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ ouvert et K un compact à bord de classe $\mathcal{C}^1$ avec l'orientation canonique du bord. Pour toute fonction holomorphe sur U on a :

$$\int_{\partial K} f(z)\, \mathrm{d}z = 0$$

Démonstration. On approche K par des compacts à bords polygonaux. Notons $\delta = d(K, \mathbb{C} \setminus U) > 0$. Paramétrons δK par un nombre fini d'arcs $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Pour chaque tel arc $\gamma : [a, b] \to U$, soit une subdivision $a = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_n = b$ telle que $|\gamma(\tau_{j+1}) - \gamma(\tau_j)| \leq \varepsilon \leq \delta/2$. Chaque segment $[\gamma(\tau_{j+1}), \gamma(\tau_j)] \subset U$. Pour ε assez petit, la réunion de ces segments constitue le bord d'un compact K_ε à bord polygonal. $K_\varepsilon = \cup_i T_i$ est réunion de triangles adjacents et le lemme de Goursat 3.6 implique

$$\int_{\partial K_\varepsilon} f(z)\, \mathrm{d}(z) = \sum_i \int_{\partial T_i} f(z)\, \mathrm{d}z = 0$$

D'après la proposition , on a bien :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial K_\varepsilon} = \int_{\partial K} f(z)\, \mathrm{d}z$$

D'où le résultat. ∎

Théorème 3.5: Formule de Cauchy

Soit f holomorphe sur un ouvert $U \subseteq \mathbb{C}$ et K un compact à bord orienté $\mathcal{C}^1$ par morceaux inclus dans U. Alors, pour tout $z \in K$

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial K} \frac{f(\omega)}{\omega - z} \, \mathrm{d}\omega$$

Démonstration. Soit $r > 0$ tel que $\overline{D(z,r)} \subset \mathring{K}$. On note $K_r = K \setminus D(z,r)$. K_r est un compact à bord orienté $\mathcal{C}^1$ par morceaux dont le bord est $\partial K_r = \partial K \cup \partial D^-(z,r)$ où ∂D^- signifie que ce cercle a l'orientation opposée à celle obtenue comme bord de $\overline{D(z,r)}$. La fonction $g(\omega) = f(\omega)/(\omega - z)$ et holomorphe sur $U \setminus \{z\}$. Le théorème de Goursat 3.4 appliqué à g sur le compact $K_r \subseteq U \setminus \{z\}$ donne

$$\int_{\partial K} \frac{f(\omega)}{\omega - z} \, \mathrm{d}\omega - \int_{\partial D(z,r)} \frac{f(\omega)}{\omega - z} \, \mathrm{d}\omega = 0$$

En posant $\omega = z + re^{it}$ on a :

$$\int_{\partial D(z,r)} \frac{f(\omega)}{\omega - z} \, \mathrm{d}\omega = \int_0^{2\pi} \frac{f\left(z + re^{it}\right)}{re^{it}} ire^{it} \, \mathrm{d}t = i \int_0^{2\pi} f\left(z + re^{it}\right) \, \mathrm{d}t$$

et cette dernière intégrale tend vers $2i\pi f(z)$ lorsque r tend vers 0 par continuité de f au point z. ■

Théorème 3.6: Équivalence Holomorphie-Analycité

Soit $f : U \to \mathbb{C}$. f est holomorphe sur U si et seulement si elle est analytique.

Démonstration. On a déjà l'implication analycité holomorphie. Supposons f holomorphe sur U et $\overline{D}(z_0, r) \subset U$. Pour $z \in D(z_0, r)$, la formule de Cauchy 3.5 donne

$$f(z) \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(z_0,r)} \frac{f(\omega)}{\omega - z} \, \mathrm{d}\omega$$

Or

$$\frac{1}{\omega - z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\omega - z_0)^{n+1}}$$

De plus, pour $\omega = z_0 + re^{it}$,

$$\left| \frac{(z - z_0)^n}{(\omega - z_0)^{n+1}} \right| = \frac{1}{r} \left(\frac{|z - z_0|}{r} \right)^n, \text{ avec } |z - z_0|/r < 1$$

Par convergence normale pour $t \in [0, 2\pi]$, on obtient :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(z_0,r)} f(\omega) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\omega - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}\omega \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\partial D(z_0,r)} \frac{f(\omega)}{2i\pi (\omega - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}\omega \, (z - z_0)^n \\ &= \sum a_n (z - z_0)^n \end{aligned}$$

et la série entière ci-dessus converge normalement sur les compacts de $D(z_0, r)$. ■

Corollaire 3.2: Classe des Dérivées

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Toute fonction holomorphe sur U est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U. Précisément, pour tout $K \subset U$ compact à bord de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et pour tout $z \in \mathring{K}$ nous avons :

1. $\forall n \geq 0, \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z) = f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\partial K} \frac{f(\omega)}{(\omega - z)^{n+1}} \, \mathrm{d}\omega$
2. $\forall n \geq 0, \forall m \geq 0, \frac{\partial^{n+m} f}{\partial z^n \partial \bar{z}^m}(z) = 0.$

En particulier, une fonction holomorphe f admet des dérivées complexes $f^{(n)}$ d'ordre n arbitraire et les dérivées $f^{(n)}$ sont holomorphes.

Théorème 3.7: Morera

Soit f une fonction continue sur un ouvert U de $\mathbb{C}$. Nous supposons que $\int_{\partial T} f(z) \, \mathrm{d}z = 0$ pour tout triangle T inclus dans U. Alors f est holomorphe sur U.

Démonstration. Soit $z_0 \in U$ et $r > 0$ tel que $\overline{D}(z_0, r) \subset U$. Pour $z \in D(z_0, r)$, on pose

$$F(z) = \int_{[z_0, z]} f(\omega) \, \mathrm{d}\omega$$

Soit $z \in D(z_0, r)$ et $h \neq 0$ tel que $z + h \in D(z_0, r)$. Comme le triangle de sommets $z_0, z, z + h$ est inclus dans $D(z_0, r)$, nous avons

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h} \int_{[z, z+h]} f(\omega) \, \mathrm{d}\omega = \int_0^1 f(z + th) \, \mathrm{d}t$$

Comme f est continue au point z,

$$\lim_{h \in \mathbb{C}^*, h \to 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = f(z)$$

Ainsi F est holomorphe sur $D(z_0, r)$ donc analytique d'après le théorème 3.6 et sa dérivée $f = F'$ l'est donc aussi. ∎

Corollaire 3.3: Γ

La fonction Γ

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{s-1} \, \mathrm{d}t$$

est holomorphe pour $\Re s > 0$.

Démonstration. L'intégrale converge en $t = 0$ car $\left|t^{s-1} e^{-t}\right| \leq t^{\Re s - 1}$. À s fixé pour $t \in \mathbb{R}_+$ grand,

$$\left|t^{s-1} e^{-t}\right| = t^{\Re s - 1} e^{-t} \leq e^{t/2} e^{-t} = e^{-t/2}$$

Donc $\Gamma(s)$ est bien définie pour $\Re s > 0$. Soit $\gamma : [0, 1] \to \{s, \Re s > 0\}$ la courbe décrivant un triangle. Alors, d'après le théorème de Fubini

$$\int_\gamma \Gamma(s) \, \mathrm{d}s = \int_\gamma \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}s = \int_0^{+\infty} \left(\int_\gamma t^{s-1} \, \mathrm{d}s \right) e^{-t} \, \mathrm{d}t = 0$$

Ainsi, en appliquant le théorème de Morera 3.7, la fonction Γ est holomorphe sur le demi-plan $\Re s > 0$. ∎

4 Propriétés Élémentaires des Fonctions Holomorphes

4.1 Théorème d'inversion locale

Théorème 4.1: Inversion Locale

Si $f \in \mathcal{O}(U)$, $a \in U$, $f'(a) \neq 0$, alors, $\exists V$ voisinage ouvert de a inclus dans U sur lequel f est biholomorphe sur $f(V)$ ouvert.

Démonstration. Comme $f \in \mathcal{O}(U)$, f est $\mathbb{R}$-différentiable. Donc il existe un voisinage V ouvert de U contenant a sur lequel $f_{|V} : V \to f(V)$ est un difféomorphisme. Alors, $\mathrm{d}_{f(z)}\left(f^{-1}\right) = \left(d_z f\right)^{-1}$ et donc $f^{-1} \in \mathcal{O}(U)$. ■

Idée des Séries Majorantes.

- On suppose d'abord $a = 0, f(a) = 0, f'(a) = 1$. On a

$$f(z) = z - \sum_{n \geq 2} a_n z^n, z \in D(0, r)$$

On veut résoudre $f(z) = \omega = z - \sum_{n \geq 2} a_n z^n$ i.e. $z = \omega + \sum_{n \geq 2} a_n z^n$. Mais, $\sum_{n \geq 2} a_n z^n = \mathcal{O}\left(w^2\right)$:

$$z = \omega + \sum_{n \geq 2} a_n \left(\omega + \mathcal{O}\left(\omega^2\right)\right)^n = \omega + a_2 \omega^2 + \mathcal{O}\left(\omega^3\right)$$

On peut alors réinjecter :

$$z = \omega + a_2 \omega^2 + \left(2a_2^2 + a_3\right) \omega^3 + \mathcal{O}\left(\omega^4\right)$$

et ainsi de suite :

$$z = \omega + \sum_{n=2}^{N} P_n\left(a_2, \ldots, a_n\right) \omega^n + \mathcal{O}\left(\omega^{N+1}\right)$$

où les $P_n \in \mathbb{N}\left[X_2, \ldots, X_n\right]$.

- Montrons maintenant que cette série converge lorsque $N \to \infty$. On sait que la série $\sum a_n z^n$ converge sur $D(0, r)$. Pour $r' < r$, $|a_n r'^n| \to 0$. Donc il existe $M > 0$ tel que $|a_n| \leq M^n$. Or,

$$z = \omega + \sum_{n=2}^{+\infty} P_n\left(M^2, \ldots, M^n\right) \omega^n$$

est solution de :

$$\begin{aligned} \omega =& z - \sum_{n \geq 2} M^n z^n \\ =& z - \left(\frac{1}{1 - Mz} - 1 - Mz\right) \end{aligned}$$

Donc

$$(1 - Mz)\,\omega = z(1 - Mz) - 1 + 1 - Mz + Mz(1 - Mz)$$

C'est à dire :

$$z^2\left(M + M^2\right) + z(-M\omega - 1) + \omega = 0$$

ou

$$z = \frac{(M\omega + 1) - \sqrt{(1 + M\omega)^2 - 4\omega\left(M + M^2\right)}}{2\left(M + M^2\right)}$$

On prend ici pour $\sqrt{\cdot}$ la détermination holomorphe de $()^{1/2}$ qui existe sur $D(1, 1)$ et pour laquelle $\sqrt{1} = 1$ de sorte que pour $\omega = 0$, $z = 0$.

La série définissant $\sqrt{\cdot}$ converge alors sur $D(0,R)$ où $R = \frac{1}{(1+\sqrt{2})M+4M^2}$. En effet, alors, on a

$$\left|M^2\omega^2\right| \leq M^2 |\omega| R \leq \frac{M^2 |\omega|}{(1+\sqrt{2})M} = \left(\sqrt{2}-1\right) M |\omega|$$

et donc

$$\left|\left(2M+4M^2\right)\omega - M^2\omega^2\right| \leq \left(2M+4M^2\right)|\omega| + \left|M^2\omega^2\right| \leq \left(\left(1+\sqrt{2}\right)M + 4M^2\right)|w| < 1$$

D'où la convergence de $g(\omega) = \omega + \sum_{n\geq 2} P_n(a_2,\ldots,a_n)\,\omega^n$ sur $D(0,R)$. et $g(D(0,R)) \subset D(0,1/M)$.

- Par identification de la série entière en zéro et principe du prolongement analytique, nous avons $f \circ g(\omega) = \omega$ pour $\omega \in D(0,R)$. De plus, par construction, g est injective sur $W = D(0,R)$ et l'image $\omega = f(z)$ atteint surjectivement W sur $g(W) \subseteq D(0,1/M) \cap f^{-1}(W)$. Prenons V la composante connexe de 0 dans $D(0,1/M) \cap f^{-1}(W)$. Alors $f(V) \subset W$ et $g(W) \subset V$. V, W sont ouverts et $f_{|V} \circ g_{|W} = id_W$. Par connexité de V et prolongement analytique, $g_{|W} \circ f_{|V} = id_V$.

■

4.2 Théorème de l'Application Ouverte

Théorème 4.2: Pré-Application Ouverte

Soit $f \in \mathcal{O}(U)$ non constante au voisinage de $a \in U$, $f(a) = 0$ et

$$m = \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid f^{(k)}(a) \neq 0\}$$

Il existe alors un voisinage ouvert V de a, un voisinage ouvert W de 0 et un biholomorphisme $\varphi : V \to W$ tel que φ envoie a sur 0 et $f(z) = f(a) + \varphi(z)^m$.

Démonstration. D'après le théorème 2.4 il existe $U' \subseteq U$ un voisinage de a et $g \in \mathcal{O}(U')$ tels que pour tout $z \in U'$

$$f(z) - f(a) = \alpha (z-a)^m g(z)$$

avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $g(a) = 1$.
Soit $V = \{z \in U' \mid |g(z) - 1| < 1\}$. C'est un voisinage de a sur lequel $\exp \frac{1}{m} \log(g(z))$ existe.
On a alors

$$\forall z \in V', f(z) = f(a) + (\varphi(z))^m$$

où

$$\varphi(z) = \alpha_m (z-a) \exp\left(\frac{1}{m}\log(g(z))\right)$$

où $\alpha_m^m = \alpha$. Alors, $\varphi \in \mathcal{O}(V')$ avec $\varphi(a) = 0$ et $\varphi'(a) = 1$. Par théorème d'inversion locale 4.1, on a un voisinage $V \subset V'$ de a sur lequel φ est un biholomorphisme. ■

Corollaire 4.1: Solutions d'une Équation

Soit $f \in \mathcal{O}(U)$ non constante au voisinage de $a \in U$ et

$$m = \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid f^{(k)}(a) \neq 0\}$$

. Alors, $\exists r, \rho \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\forall \omega \in D(f(a), \rho) \setminus \{f(a)\}$ l'équation $f(z) = \omega$ a exactement m solutions dans $D(a,r)$.

Démonstration. On écrit par le théorème 4.2 précédent $f(z) = \omega = f(a) + \varphi(z)^m$ où $\varphi : V \to W$ est tel que $\varphi(a) = 0$. On suppose $\varphi(z) = (\omega - f(a))^{1/m}$ pour une certaine détermination de l'exponentielle. On prend r tel que $D(a,r) \subset V$. $\varphi(D(a,r))$ est un ouvert de W voisinage de 0.

Il existe un ρ' tel que $D(0,\rho')$ est inclus dans $\varphi(D(a,r))$. Alors, pour tout $\omega \in D(f(a),\rho'^m)$, $(\omega - f(a))^{1/m} \in D(0,\rho')$. Mézalor, $e^{2ik\pi/m}(w - f(a))^{1/m}$ sont dans $D(0,\rho')$. On obtient alors

$$z_k = \varphi^{-1}\left(e^{2ik\pi/m}(\omega - f(a))^{1/m}\right) \in D(a,r)$$

.
Les z_k sont solutions de $f(z) = \omega$ et donc il y en a bien exactement m.
De même, l'équation $f(z) = f(a)$ n'a qu'une solution $z = a$ dans $D(a,r)$ de multiplicité m. ■

Théorème 4.3: Application Ouverte

Une fonction holomorphe non constante sur un ouvert U connexe est une application ouverte.

Démonstration. Par le corollaire 4.1, tout point $z_0 \in U$ admet un voisinage $V_{z_0} \subset U$ tel que $f(V_{z_0}) = D(f(z_0),\rho(z_0))$. Ainsi, $f(U) = \cup D(f(z_0),\rho(z_0))$ est ouvert. ■

Théorème 4.4: Théorème d'Inversion Gloable

Soit U un ouvert connexe et $f \in \mathcal{O}(U)$ injective. Alors :

1. $f(U)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$
2. f' ne s'annule pas sur U
3. $f : U \to f(U)$ est un biholomorphisme

Démonstration.

1. D'après le théorème de l'application ouverte 4.3, f, injective donc non constante, est ouverte donc $f(U)$ est ouverte et f est une bijection continue ouverte de U dans $f(U)$, i.e., un homéomorphisme.
2. Supposons qu'il existe z_0 pour lequel $f'(z_0) = 0$. Dans le théorème 4.1, on a un entier $m \geq 2$ et donc f n'est pas injective au voisinage de z_0 ce qui est absurde. Donc f' ne s'annule pas sur U.
3. D'après les deux premiers points et le théorème 4.1 d'inversion locale, f^{-1} est holomorphe sur $f(U)$ et $f : U \to f(U)$ est un biholomorphisme.

■

4.3 Lemme de Schwarz

Théorème 4.5: Principe du Maximum

Soit $f \in \mathcal{O}(U)$

1. Si $|f|$ admet une maximum local en un point $a \in U$, alors f est constante sur la composante connexe contenant a.
2. Pour tout $K \subset U$

$$\max_K |f| = \max_{\partial K} |f|, \max_K \Re f = \max_{\partial K} \Re f, \max_K \Im f = \max_{\partial K} \Im f$$

Démonstration.

1. Supposons f non constante sur la composante connexe U_0 de U contenant a avec $|f(a)| = \sup_U |f| = \sup_{U_0} |f|$. D'après le théorème de l'application ouverte, f est ouverte sur U_0. L'image $f(U_0)$ est un voisinage de $f(a)$ donc contient des points de module strictement supérieur à $|f(a)|$.
2. Si $\max_{\partial K} \Re f < \max_K \Re f$, il existe $z_0 \in \mathring{K}$ avec $\Re f(z_0) = \max_K \Re f$. Soit U_0 une composante connexe de z_0 dans $\mathring{K}$ et f non constante dans U_0. Alors $f(U_0)$ est un ouvert qui contient

$f(z_0)$ et qui est contenue dans le demi-plan $\{w \mid \Re w \leq \Re f(z_0)\}$. Donc f est constante sur U_0 et $\Re f_{|\partial U_0} = \Re f(z_0)$ par continuité de f. Or

$$\varnothing \neq \partial U_0 \subset \partial \mathring{K} = \overline{\mathring{K}} \setminus \mathring{K} \subseteq \overline{K} \setminus \mathring{K} = \partial K$$

ainsi, $\max_K \Re f = \Re f(z_0)$ est atteint sur ∂K. Les cas $|f|$ et $\Im f$ sont analogues.

■

Théorème 4.6: Lemme de Schwarz

Soit f holomorphe sur $D(0,1)$ avec $f(0) = 0$ et $|f(z)| \leq 1$ sur $D(0,1)$. Alors, on a

$$\forall z \in D(0,1), |f(z)| \leq |z| \text{ et } |f'(0)| \leq 1$$

De plus si

$$\exists z_0 \in D(0,1) \setminus \{0\}, |f(z_0)| = |z_0| \text{ ou } |f'(0)| = 1$$

alors f est une rotation : $f(z) = az$ pour $a \in \mathbb{C}, |a| = 1$.

Démonstration. L'application $g(z) = f(z)/z$ est holomorphe sur $D(0,1)$ et vérifie $g(0) = f'(0)$. En appliquant le principe du maximum à la fonction g sur $D(0,r), r < 1$, on obtient :

$$\sup_{D(0,r)} |g| = \sup_{\partial D(0,r)} |g| = \sup_{\partial D(0,r)} |f|/r \leq 1/r$$

En faisant tendre r vers 1, nous obtenons

$$\sup_{D(0,1)} |g| \leq 1 \iff \begin{cases} |f(z)| \leq |z| & \forall z \in D(0,1) \setminus \{0\} \\ |f'(0)| \leq 1 \end{cases}$$

De plus, si $\exists z_0 \in D(0,1) \setminus \{0\}$, $|f(z_0)| = |z_0|$ ou si $|g(0)| = |f'(0)| = 1$, alors $|g|$ admet un maximum local en z_0 ou 0 donc $g = a$ est constante avec $|a| = 1$. ■

Corollaire 4.2: Point Fixe

Soit $f : D(0,1) \to D(0,1)$ holomorphe, $f \neq \mathrm{Id}$. Alors f a au plus un point fixe.

Démonstration. Supposons que nous ayons $a \neq b \in D(0,1)$ avec $f(a) = a$ et $f(b) = b$.
Si $a = 0, f(0) = 0, f(b) = b$, le lemme de Schwarz montre que $f = e^{i\theta} z$ et comme $f(b) = b$, $f = \mathrm{Id}$.
On peut donc supposer $a \neq 0$. Posons $\varphi_\alpha(z)$ [1] $= \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ et

$$g = \varphi_\alpha \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1} \text{ et } \lambda = \varphi_\alpha(b) \neq 0$$

Ainsi, $g : D(0,1) \to D(0,1)$ avec deux points fixes $g(0) = 0, g(\lambda) = \lambda$. Donc $g = \mathrm{Id} = f$. Absurde. ■

4.4 Disque Unité et Inversion Locale Effective

Définition 4.1: Automorphisme

Un automorphisme de U est une bijection holomorphe de U dans U. On note $\mathrm{Aut}\, U$ l'ensemble des automorphismes de U.

1. C'est la fonction du jour !

On rappelle que le groupe unitaire de signature (n,m) est le groupe des matrices préservant une forme hermitienne de signature (n,m). Il est isomorphe au groupe $U(n,m)$ préservant la forme hermitienne diagonale de signature (n,m) :

$$U(n,m)=\left\{\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\in\mathrm{GL}_{n+m}(\mathbb{C})\;\middle|\;\begin{array}{l}AA*-BB*=I_n\\ DD*-CC*=I_m\\ AC*=BD*\end{array}\right\}$$

Théorème 4.7: Automorphisme du Disque Unité

$$\operatorname{Aut}D(0,1)=\left\{\varphi_\alpha : z\longmapsto e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\;\middle|\;\theta\in\mathbb{R},a\in\mathbb{C},|a|<1\right\}=\mathrm{PSU}(1,1)$$

Démonstration. • Nous vérifions que $\varphi_\alpha\in\operatorname{Aut}D$. Soit $f\in\operatorname{Aut}D$. On note $a=f(0)$. On a $\varphi_\alpha\circ f(0)=0$ et pour tout $z\in D$, $|\varphi_\alpha\circ f(z)|<1$. Le lemme de Schwarz 4.6 implique alors que $g=\varphi_\alpha\circ f$ vérifie $|g(z)|\leq|z|$ et de même $\left|g^{-1}(z)\right|\leq|z|$ donc $|g(z)|=|z|$ pour $z\in D$. Donc il existe $\theta\in\mathbb{R}$ tel que $g(z)=e^{i\theta}z$.

- L'application :

$$\varphi_\alpha\longmapsto\frac{1}{1-|a|^2}\begin{pmatrix}e^{i\theta/2} & -\alpha e^{i\theta/2}\\ -\bar{\alpha}e^{-i\theta/2} & e^{-i\theta/2}\end{pmatrix}$$

induit un automorphisme

$$\operatorname{Aut}D\to\mathrm{PSU}(1,1)=\left\{\begin{pmatrix}A & B\\ \bar{A} & \bar{B}\end{pmatrix}\;\middle|\;|A|^2-|B|^2=1\right\}/\pm\mathrm{Id}$$

∎

Corollaire 4.3: Schwarz-Pick

Soit $f:D(0,1)\to D(0,1)$ holomorphe. Pour $z\in D(0,1)$ on a :

$$\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2}\leq\frac{1}{1-|z|^2}$$

avec égalité si et seulement si $f\in\operatorname{Aut}D(0,1)$.

Démonstration. La dérivée de $\varphi_\alpha(z)=\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}\in\operatorname{Aut}D$ vérifie :

$$\varphi_\alpha'(z)=\frac{1-|\alpha|^2}{(1-\bar{\alpha}z)^2},\varphi_\alpha'(0)=1-|\alpha|^2,|\varphi_\alpha'(\alpha)|=\frac{1}{1-|\alpha|^2}$$

Soit $z_0\in D$ et $g=\varphi_{f(z_0)}\circ f\circ\varphi_{-z_0}$. On a $g(0)=0$ et $g:D\to D$. Le lemme de Schwarz 4.6 implique que $|g(z)|\leq|z|$ et $|g'(0)|\leq 1$. L'inégalité attendue résulte de

$$g'(0)=\varphi_{f(z_0)}(f(z_0))f'(z_0)\varphi_{-z_0}'(0)=\frac{1}{1-|f(z_0)|^2}f'(z_0)(1-|z_0|)^2$$

Le cas d'égalité correspond à $|g'(0)|=1$. Alors g et donc f sont des automorphismes de D. ∎

Théorème 4.8: Bloch-Landau

Soit $f\in\mathcal{O}(D(z_0,r))$ telle que $f'(z_0)\neq 0$. Alors il existe $U\subset D(z_0,r)$ tel que $f_{|U}$ est un biholomorphisme de U sur $f(U)=D(\omega_0,R)$ disque de rayon $R\geq\frac{r}{12}|f'(z_0)|$.

Démonstration. Quitte à considérer la restriction de f et à remplacer f par $f(z_0 + rz)$ on peut considérer définie au voisinage du disque fermé $\overline{D}(0,1)$. On pose

$$m = \sup_{z\in\overline{D}(0,1)} \left(1 - |z|^2\right) |f'(z)| \geq |f'(0)|$$

La valeur m est atteinte en $\alpha \in D(0,1)$ et alors $m = \left(1 - |\alpha|^2\right) |f'(\alpha)|$. Posons $h = f \circ \varphi_{-\alpha}$. On a :

$$h(0) = f(\alpha), h'(0) = f'(\alpha)\varphi_{-\alpha}(0) = \left(1 - |\alpha|^2\right) f'(\alpha), |h'(0)| = m \geq |f'(0)|$$

De plus, pour $|z| < 1$, d'après le corollaire de Schwarz-Pick 4.3 :

$$\left(1 - |z|^2\right) |h'(z)| = \frac{\left(1 - |z|^2\right) |\varphi'_{-a}(z)|}{1 - |\varphi_{-\alpha}(z)|^2} \left(1 - |\varphi_{-\alpha}(z)|^2\right) |f'(\varphi_{-\alpha}(z))| \leq m$$

Quitte à remplacer h par $\frac{1}{h'(0)}(h - h(0))$, on peut supposer $h(0) = 0$ et $m = h'(0) = 1$. Donc :

$$|h'(z)| \leq \frac{1}{1 - |z|^2}, z \in D(0,1)$$

Le rayon de convergence du développement en série entière [2]

$$h(z) = z + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n z^n$$

est supérieur à 1 et les inégalités de Cauchy appliquées à h' sur le disque $D(0,\rho)$ donnent

$$h^{(n)}(\omega) = \frac{(n-1)!}{2\pi\rho^{n-1}} \int_0^{2\pi} \frac{h'\left(\omega + re^{it}\right)}{e^{i(n-1)t}} \mathrm{d}t \text{ et } n|a_n| \leq \frac{1}{(1-\rho^2)\rho^{n-1}}$$

Or, $\rho \mapsto \left(1 - \rho^2\right)\rho^{n-1}$ atteint son maximum en $\rho = \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$. Pour ce ρ, on obtient :

$$|a_n| \leq \frac{n+1}{2n} \left(1 + \frac{2}{n-1}\right)^{(n-1)/2}$$

et pour $M = 3^{3/4}/2$, $|a_n| \leq M^n$ si $n \geq 2$.
En reprenant la preuve du théorème d'inversion locale par la méthode des séries majorantes 4.1, on obtient que h est un biholomorphisme d'un ouvert U sur le disque $D(0,R)$ avec :

$$R = \frac{1}{\left(1 + \sqrt{2}\right) M + 4M^2} > \frac{1}{12}$$

■

5 Espaces de Fonctions Holomorphes

5.1 Convergence de Suites de Fonctions Holomorphes

On dit qu'une suite converge localement de manière uniforme lorsque

$$\forall x \in U, \exists r_x > 0, f_n \xrightarrow[D(x,r_x)]{\text{CU}} f$$

La convergence uniforme localement est équivalente à la convergence uniforme sur tout compact.

Démonstration. $\Leftarrow$ K étant compact, on le recouvre par un nombre fini de disques.

2. DONC DE TAYLOR

$\Rightarrow$ En considérant un disque fermé inclus dans l'ouvert, on a convergence sur ce disque. ∎

On rappelle que si $\sum f_n$ converge uniformément sur un compact et que les f_n sont holomorphes, $\sum f_n \in \mathcal{O}(K)$.

Théorème 5.1: Weierstrass

Soit $f_n \in \mathcal{O}(U)$, $f_n \xrightarrow[\forall K \subset U]{\text{CU}} f$. Alors, $f \in \mathcal{O}(U)$ et $\forall l \in \mathbb{N}, f_n^{(l)} \xrightarrow[\forall K \subset U]{\text{CU}} f^{(l)}$.

Démonstration. On considère $\overline{D(a,r)} \subset U$. On a :

$$f_n(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(a,r)} \frac{f_n(\omega)}{\omega - z} \mathrm{d}\omega$$

On échange limite et intégrale par convergence uniforme et on obtient les formules de Cauchy pour f. ∎

5.2 Théorèmes de Runge

On cherche une suite de polynôme convergeant vers une fonction holomorphe.

Théorème 5.2: Runge - 1

Soit $f \in \mathcal{O}(D(z_0, R))$, $K \subseteq D(z_0, R)$. Alors, si $\varepsilon > 0$, il existe $P_\varepsilon \in \mathbb{C}[z]$ tel que

$$\max_K |f - P_\varepsilon| < \varepsilon$$

Démonstration. On suppose d'abord $z_0 = 0$. On pose $f(z) = \sum a_n z^n$ sur $D(0, R)$, on note R' son rayon de convergence. Par la formule d'Hadamard :

$$\frac{1}{R'} = \limsup |a_n|^{1/n}$$

Pour $\delta > 0$, il existe $N(\delta)$ tel que $|a_n|^{1/n} \leq 1/R' + \delta$. On choisit r assez petit pour que $0 < R - r < d(K, \mathbb{C} \setminus D(0, R))$. ∎

Lemme 5.1: Approximation Rationnelle

Soit K un compact inclus dans U ouvert de $\mathbb{C}$. Pour $\gamma : [0,1] \to U \setminus K$ un chemin de classe $\mathcal{C}^1$. Nous notons

$$F_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} \mathrm{d}w$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $P, Q \in \mathbb{C}[Z]$ avec Q sans zéro dans K tels que

$$\max_{z \in K} \left| F_\gamma(z) - \frac{P(z)}{Q(z)} \right| \leq \varepsilon$$

Démonstration. Idée : La fonction

$$H : \begin{array}{ccc} K \times [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (z,t) & \longmapsto & \frac{1}{2i\pi} \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - z} \gamma'(t) \end{array}$$

est continue sur le compact $Kra \times [0,1]$ donc uniformément continue. Par conséquent

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, |t_1 - t_2| \leq \delta(\varepsilon) \Longrightarrow |H(z, t_1) - H(z, t_2)| \leq \varepsilon, \forall z \in K$$

Ainsi, pour n tel que $1/n \leq \delta(\varepsilon)$,

$$\left| F_{\gamma(z)} - \sum_{k=0}^{n-1} H(z, k/n) \frac{1}{n} \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} |H(z,t) - H(z,k/n)| \, \mathrm{d}t \leq \varepsilon$$

En posant

$$\frac{P}{Q} = \sum_{k=0}^{n-1} H(z, k/n) \frac{1}{n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2i\pi} \frac{f(\gamma(k/n))}{\gamma(k/n) - z} \gamma'(k/n) 1/n$$

on obtient une fraction rationnelle qui approche F_γ sur K avec $Q(z) = \prod_{k=0}^{n-1} (\gamma(k/n) - z) \in \mathbb{C}[z]$. ■

Théorème 5.3: Runge - 2 - Rationelle Edition

Soit $K \subseteq U$ un compact. Toute fonction $f \in \mathcal{O}(U)$ peut-être approchée uniformément sur K par des fractions rationnelles sans pôle sur K :

$$\forall f \in \mathcal{O}(U), \forall \varepsilon > 0, \exists P, Q \in \mathbb{C}[z] \, \text{telsque} \max_{z \in K} \left| f(z) - \frac{P(z)}{Q(z)} \right| \leq \varepsilon$$

Démonstration.

- Construction d'un contour de K. Soit $\alpha \in \left]0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right[$ et

$$\delta = \alpha d(K, \mathbb{C} \setminus U) > 0$$

Pour $k, l \in \mathbb{Z}$, nous notons le carré plein fermé de côté δ :

$$\overline{\Pi}_{k,l} = \{x + iy \in \mathbb{C} | k\delta \leq x \leq (k+1)\delta, l\delta \leq y \leq (l+1)\delta\}$$

et $\Pi_{k,l} = \mathring{\overline{\Pi}}_{k,l}$ le carré plein ouvert. Nous avons le pavage

$$\mathbb{C} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \bigcup_{l \in \mathbb{Z}} \overline{\Pi}_{k,l}$$

Nous notons $\overline{\Pi}_1, \ldots, \overline{\Pi}_J$ la collection de tous les $\overline{\Pi}_{k,l}$ d'intersection non nulle avec K et $\gamma_1, \ldots, \gamma_H$ les segments de longueur δ qui appertiennent au bord d'un unique $\overline{\Pi}_j$ sans appartenir à deux bords de deux carrés adjacents. Quitte à translater K et réduire δ, on peut supposer que K contient au moins un point à l'intérieur de chaque carré.
Pour tout j, il existe $z_j \in \Pi_j \cap K$. On a :

$$|z_j - w| \leq \sqrt{2}\delta \Rightarrow w \in \overline{\Pi}_j$$

Or, $\delta < \alpha d(K, \mathbb{C} \setminus U)$ donc

$$\sqrt{2}\delta < d(K, \mathbb{C} \setminus U)$$

Par conséquent, $\overline{\Pi}_j \subseteq \overline{D}\left(z_j, \sqrt{2}\delta\right) \subseteq U$ et

$$\bigcup_j \overline{\Pi}_j \subseteq U \text{ et } \bigcup_{1 \leq h \leq H} \gamma_h \subseteq U$$

De plus, pour tout $1 \leq h \leq H$, $\gamma_h \cap K = \varnothing$. Sinon, si $z \in \gamma_h \cap K$, il existe deux carrés adjacents tel que $\gamma_h = \overline{\Pi}_{k(h),l(h)} \cap \overline{\Pi}_{k'(h),l'(h)}$. Comme z appartient à chacun d'eux, les carrés $\overline{\Pi}_{k(h),l(h)}$ et $\overline{\Pi}_{k'(h),l'(h)}$ appartiennent tous deux à la collection des $\overline{\Pi}_i$. Donc γ_h est un bord commun à deux carrés de la collection ce qui est exclu.

- Pour tout $z \in K \setminus \bigcup_{j=1}^{J} \delta\Pi_j$, il existe un unique $j(z)$ avec $z \in \Pi_{j(z)}$. Pour tout $j' \neq j(z)$,

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\delta\Pi_{j'}} \frac{f(w)}{w - z} \mathrm{d}w = 0$$

et

$$f(z) = \sum_{j=1}^{J} \frac{1}{2i\pi} \int_{\delta\Pi_j} \frac{f(w)}{w-z} \mathrm{d}w$$

- Si $z \in K \setminus \bigcup_{j=1}^{J} \delta\Pi_j$, on a, par définitions des γ_h, les contributions des autres bords des $\delta\Pi_j$ s'annulant deux à deux :

$$f(z) = \sum_{j=1}^{J} \frac{1}{2i\pi} \int_{\delta\Pi_j} \frac{f(w)}{w-z} \mathrm{d}w = \sum_{h=1}^{H} \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_h} \frac{f(w)}{w-z} \mathrm{d}w$$

Comme $\gamma_h \cap K = \varnothing$, les intégrales $\int_{\gamma_h} \frac{f(w)}{w-z} \mathrm{d}w$ sont continues par rapport à $z \in K$. L'égalité précédente est donc encore satisfaite pour $z \in K \cap \bigcup_{j=1}^{J} \delta\Pi_j$.
D'après le lemme précédent 5.1, pour tout $1 \leq h \leq H$, il existe $P_h, Q_h \in \mathbb{C}[z]$, Q_h sans zéros dans K avec

$$\sup_{z \in K} \left| F_{\gamma_h}(z) - \frac{P_h(z)}{Q_h(z)} \right| \leq \frac{\varepsilon}{H}$$

Posons alors $Q = \prod_{h=1}^{H} Q_h \in \mathbb{C}[z]$ et

$$P = Q \prod_{h=1}^{H} \frac{P_h}{Q_h} \in C[z]$$

On obtient alors :

$$\left| f(z) - \frac{P(z)}{Q(z)} \right| \leq \varepsilon$$

■

Lemme 5.2: Approximation Polynômiale des Fractions Rationnelles

Si $K \subseteq \mathbb{C}$ compact a un complémentaire connexe, alors pour tout $z_0 \notin K$, la fonction rationnelle $\frac{1}{z-z_0}$ peut être approchée uniformément sur K par des polynômes de $\mathbb{C}[z]$.

Démonstration.

- Comme K est compact, il est borné donc inclus dans un disque $D(0,R)$. Pour $z_1 \in \mathbb{C} \setminus D(0,R)$, on a :

$$\frac{1}{z-z_1} = -\frac{1}{z_1} \frac{1}{1-\frac{z}{z_1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{z^n}{z_1^{n+1}}$$

série uniformément convergente pour tout $z \in K$. Donc la fraction $\frac{1}{z-z_1}$ peut être approximée uniformément par des polynômes sur K. De même pour toute puissance.

- Comme $\mathbb{C} \setminus K$ est connexe de $\mathbb{C}$ donc connexe par arcs, il existe un chemin $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus K$ avec $\gamma(0) = z_0$ et $\gamma(1) = z_1$. L'image $\gamma([0,1])$ est compacte disjointe de K donc $\rho = \frac{1}{2} d(\gamma([0,1]), K) > 0$. Choississons une subdivisions de $\gamma([0,1])$ de pas au plus ρ. Pour toute paire de points $w, w' \in \gamma([0,1])$ avec $|w-w'| \leq \rho$, pour $z \in K$, on a :

$$\frac{1}{z-w} = \frac{1}{z-w'} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{w-w'}{z-w'} \right)^n$$

et cette comme est uniformément convergente car $\left| \frac{w-w'}{z-w'} \right| \leq 1/2$. Ainsion a une approximation de $\frac{1}{z-w}$ par des polynômes en $\frac{1}{z-w'} z - w$ par des polynômes en $\frac{1}{z-w'}$.

■

Théorème 5.4: Runge - 3 - Polynomial Edition

Soit $K \subseteq U$ compact de complémentaire connexe. Alors, les fonctions holomorphes dans U sont uniformément approximables sur K par des polynômes :

$$\forall f \in \mathcal{O}(U), \forall \varepsilon > 0, \exists P_\varepsilon \in \mathbb{C}[z] \,\text{telque}\, \max_{z \in K} |f(z) - P_\varepsilon(z)| \leq \varepsilon$$

Démonstration. Ceci découle du lemme 5.2 que l'on combine à la version rationnelle 5.3 du théorème de Runge ∎

5.3 Théorème de Montel

Définition 5.1: Bornitude Uniforme

Une famille $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{O}(U)$ est uniformément bornée sur les compacts de U si pour tout $K \subseteq U$ compact, il existe $M_K \geq 0$ telle que

$$|f(z)| \leq M_K, z \in K, f \in \mathfrak{F}$$

Définition 5.2: Uniforme Équicontinuité

Une famille $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{O}(U)$ est uniformément équicontinue sur les compacts de U si pour tout $K \subseteq U$ compact, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(K, \varepsilon) > 0$ tel que

$$(z, w \in K \text{ avec } |z - w| \leq \delta) \Longrightarrow |f(z) - f(w)| \leq \varepsilon, f \in \mathfrak{F}$$

Proposition 5.1: Exemples

1. Sur $\overline{D}(0,1)$, la famille des (z^n) est uniformément bornée mais pas uniformément équicontinue. Elle l'est sur $D(0,1)$.
2. Sur $[0,1[$, la famille $(\sin(2\pi n x))$ est uniformément bornée par 1 mais n'est uniformément équicontinue sur aucun compact car les dérivées sont non bornées en n.

Définition 5.3: Normalité

Une famille $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{O}(U)$ est dite normale si pour toute suite de fonctions f_n, il existe une suite extraite uniformément convergente sur tout compact de U.

Définition 5.4: Exhaustivité

Une suite croissante de compacts (K_n) de U est exhaustive si tout compact de U est contenu dans un K_n.

Théorème 5.5: Suite Exhaustive

Pour tout ouvert U de $\mathbb{C}$, il existe une suite croissante de compacts exhaustive de réunion U.

Démonstration. Considérons la suite B_n des disques fermés contenus dans U dont les coordonnées du centre et le rayon sont rationnels. Ils forment un ensemble dénombrable. La suite des $K_i = \cup_{n=1}^{i} B_n$ convient ∎

Théorème 5.6: Mantel

Soit $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{O}(U)$ une famille de fonctions uniformément bornées sur les compacts de U. Alors

1. $\mathfrak{F}$ est uniformément équicontinue sur les compacts de U.
2. $\mathfrak{F}$ est une famille normale.

Démonstration. 1. Soit K un compact de U, $r < \frac{1}{3}d(K, \mathbb{C} - U)$. Pour $w \in K$, la famille $\mathfrak{F}$ est uniformément bornée sur $L = \{u \in U, d(u, K) \leq 2r\}$. Pour $z \in D(w, r)$ la formule de Cauchy donne :

$$f(z) - f(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(w,2r)} f(u) \left(\frac{1}{u-z} - \frac{1}{u-w} \right) \mathrm{d}u$$

Or, $|u - z| > r$ et

$$\left| \frac{1}{u-z} - \frac{1}{u-w} \right| = \frac{|z-w|}{|u-z|\, 2r} \leq \frac{|z-w|}{2r^2}$$

Ainsi

$$|f(z) - f(w)| \leq \frac{1}{2\pi} M_L \frac{|z-w|}{2r^2} 2\pi 2r \propto |z-w|$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut choisir convenablement $\delta < r$ de telle sorte qu'on a bien l'uniforme équicontinuité sur K.

2. Soit $r < \frac{1}{2}d(K, \mathbb{C} - U)$. On pose

$$K_r = \{z \in \mathbb{C}, d(z, K) \leq r\} \subseteq K_{2r} \subseteq U$$

Par hypothèses, $M_0 = \sup_{n\in\mathbb{N}, z\in K_{2r}} |f_n(z)| < +\infty$. Par l'inégalité de Cauchy,

$$M_1 = \sup_{n\in\mathbb{N}, z\in K_r} |f_n'(z)| \leq \frac{M_0}{r} < +\infty$$

Soient $z_1, z_2 \in K$. Si $d(z_1, z_2) \leq r$, alors $|z_1, z_2| \subseteq K_r$ et par théorème des accroissements finis

$$|f_n(z_1) - f_n(z_2)| \leq M_1 d(z_1, z_2)$$

À l'inverse, si $d(z_1, z_2) \geq r$, on a :

$$|f_n(z_1) - f_n(z_2)| \leq \frac{2M_0}{r} d(z_1, z_2)$$

Par théorème d'Ascoli, on peut extraire des $f_{n|_K}$ une suite uniformément convergente sur K. Pour $\nu \in \mathbb{N}^*$, on considère une suite croissante exhaustive de compacts (K_ν). D'après ce qui précède, il existe une partie infinie $S_1 \subseteq \mathbb{N}$ telle que la suite $(f_n)_{n\in S_1}$ converge uniformément sur K_1. Par récurrence sur ν, on construit une suite de parties infinies emboîtées $S_\nu \subseteq \cdots \subseteq S_1 \subseteq \mathbb{N}$ telle que la sous-suite $(f_n)_{n\in S_\nu}$ converge uniformément sur K_ν. Par extraction diagonale, on construit une sous-suite $(f_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément sur tous les compacts K_ν.

■

5.4 Compacts de $\mathcal{O}(U)$

On munit $\mathcal{O}(U)$ de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. C'est une topologie invariante par translation dans laquelle les

$$V(K, \varepsilon) = \left\{ f \in \mathcal{O}(U) \middle| \sup_{z\in K} |f(z)| < \varepsilon \right\}$$

pour K un compact de U et $\varepsilon > 0$ constituent un système de voisinage de 0. L'addition et l'homothétie sont continues pour cette topologie.
On définit de plus :

$$p_{K_n} : \begin{array}{ccc} \mathcal{O}(U) & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ f & \longmapsto & \sup_{z\in K_n} |f(z)| \end{array}$$

et

$$d(f,g) = \sum_{i\geq 1} 2^{-i} \min(1, p_{K_i}(f-g))$$

où les K_i forment une suite croissante exhaustive de compacts de U.

Lemme 5.3: Métrisabilité

La topologie de la convergence sur tout compact est métrisable par la distance d sur $\mathcal{O}(U)$.

Démonstration.

- Soit K un compact. Soit $i \in \mathbb{N}$ tel que $K \subseteq K_i$ Alors, $d(f,0) < 2^{-i}\varepsilon$ implique $p_{K_i}(f) < \varepsilon$. Donc : $B\left(0, 2^{-i}\varepsilon\right) \subseteq V(K_i, \varepsilon) \subseteq V(K, \varepsilon)$. Donc $V(K, \varepsilon)$ contient une boule centrée en 0 pour d.
- Soit $B(0,\varepsilon)$ une boule pour d. Soit $i \in \mathbb{N}$ tel que $2^{-i} < \frac{\varepsilon}{2}$. Alors, si $f \in V(K_i, \varepsilon/2)$

$$d(f,0) \leq \sum_{j=1}^{i} 2^{-j} p_{K_i}(f) + \sum_{j=i+1}^{+\infty} 2^{-j} < \varepsilon/2 + 2^{-i} < \varepsilon$$

  Donc $V(K_i, \varepsilon/2) \subseteq B(0,\varepsilon)$.

■

L'espace vectoriel $\mathcal{O}(U)$ localement convexe, métrisable et complet est un espace de Fréchet.

Théorème 5.7: Compacts de $\mathcal{O}(U)$

Les compacts de $\mathcal{O}(U)$ sont les fermés bornés.

Démonstration.

- Soit $A \subseteq \mathcal{O}(U)$ une partie compacte. Comme $\mathcal{O}(U)$ est métrisable, il est séparé, et donc A est fermée. Soit $K \subseteq U$ compact. L'application p_K est continue sur $\mathcal{O}(U)$. Donc comme A est compacte, $p_K(A)$ est compacte donc bornée dans $\mathbb{R}$. Les applications $f \in A$ sont donc uniformément bornées sur K. Pour tout compact K de U, il existe donc $\varepsilon_A > 0$ tel que $A \subseteq V(K, \varepsilon_A)$. Ainsi pour tout $V(K,\varepsilon)$ d'un système fondamental de voisinages de 0, il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ avec $A \subseteq V(K, \lambda\varepsilon)$. Donc A est bornée.
- Soit A une partie fermée bornée de $\mathcal{O}(U)$. Comme A est bornée, pour tout K compact de U, les applications $f \in A$ sont uniformément bornées sur K. Soit (f_n) une suite d'éléments de A. Par théorème de Mantel 5.6, cette suite est uniformément bornée donc admet une sous-suite convergente uniformément sur tout compact de U de limite $f \in \mathcal{O}(U)$. Comme A est fermée, $f \in A$ donc, A est séquentiellement compact pour une topologie métrisable, donc par théorème de Bolzano-Weierstrass est compact.

■

6 Aparté Réel

6.1 Méthode de Laplace

Théorème 6.1: Méthode de Laplace Réelle

Soient g, h deux fonctions réelles continues par morceaux dans $]0, +\infty[$ vérifiant

1. $\int_0^{+\infty} |g(x)| e^{h(x)} \, \mathrm{d}x < +\infty$
2. Il existe $\delta_0 > 0$ tel que $\forall \delta < \delta_0$ et tout $x \geq \delta$, on a $h(x) \leq h(\delta)$.
3. Au voisinage de 0, on a les développements asymptotiques

$$g(x) \sim Ax^{\alpha}, h(x) = a - cx^{\beta} + o\left(x^{\beta}\right)$$

où $A \neq 0$, $\alpha > -1, \beta > 0, c > 0$. Alors,

$$I(t) \sim \frac{A}{\beta} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right) e^{\alpha t} (ct)^{-(\alpha+1)/\beta}$$

Démonstration. Calcul. ■

Corollaire 6.1

Soit $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, des fonctions de classes $\mathcal{C}^2$ telles que

- $\int_{\mathbb{R}} |g(x)| e^{h(x)} \, \mathrm{d}x$ converge
- h' ne change de signe qu'en un seul point $c \in \mathbb{R}$ où h atteint un maximum
- $g(c) \neq 0$ et $h''(c) < 0$

Alors, pour t au voisinage de $+\infty$,

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) e^{th(x)} \, \mathrm{d}x \sim x \to +\infty \sqrt{pi} g(c) e^{th(c)} \sqrt{\frac{2}{-th''(c)}}$$

6.2 Comportement Asymptotique d'une Intégrale

Théorème 6.2: Laplace Complexe

Supposons que

$$\int_0^{+\infty} |g(\gamma(s))| e^{\Re h(\gamma(s))} |\gamma'(s)| \, \mathrm{d}s$$

est convergente. Pour t au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\int_{\gamma} g(z) e^{th(z)} \, \mathrm{d}z \sim \frac{A}{m} \Gamma\left(\frac{n+1}{m}\right) (\rho t)^{-\frac{n+1}{m}} e^{at+(n+1)i\omega_k}$$

Démonstration. Calcul. Encore. ■

6.3 Fonctions Harmoniques

Ici, on identifie $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$

Définition 6.1: Fonctions Harmonique

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Le *Laplacien* de f est

$$\Delta f = \partial_{xx} f'' + \partial_{yy} f''$$

La fonction f est dite *harmonique* si $\Delta f = 0$.

Proposition 6.1: Harmonicité et Holomorphie

Si U est simplement connexe, toute fonction harmonique sur U est la partie réelle d'une fonction holomorphe, unique à une constante imaginaire près.

Démonstration. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction harmonique. Alors $g = \partial_y f + i\partial_x f$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. La fonction g est holomorphe sur U car $g = P + iQ$ avec $\partial_x P = \partial_y Q = \partial_{xy} f$ et $\partial_y P = \partial_{yy} f = -\partial_{xx} f = -\partial_x Q$. Notons $G = A + iB$ une primitive de g sur U. Ainsi $G'(z) = \partial_x A + i\partial_x B = \partial_y B - i\partial_y A = g(z) = \partial_y f + i\partial_x f$. Les équations de Cauchy-Riemann montrent alors que $\varphi = f - iA$ est holomorphe. Si $f = \Re(\varphi) = \Re(\psi)$ avec $\varphi, \psi \in \mathcal{O}(U)$, alors $\varphi - \psi = c$ est constante sur U avec $\Re(c) = 0$. ∎

Corollaire 6.2: Harmonicité Locale

Toute fonction harmonique est localement la partie réelle d'une fonction holomorphe.

Corollaire 6.3: Classe Harmonique

Toute fonction harmonique est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Corollaire 6.4: Composition Harmonique

Soit $\varphi : U \to V$ holomorphe et $f :\to V$ harmonique, alors $f \circ \varphi : U \to \mathbb{R}$ est harmonique.

Corollaire 6.5: Harmonicité sur l'Intérieur

Si deux fonctions harmoniques sur U connexe coïncident sur un sous-ensemble $V \subseteq U$ d'intérieur non vide, alors elles sont égales sur U

Démonstration. Soit $u = f_1 - f_2$ la différence de deux fonctions satisfaisant les hypothèses du corollaire et

$$F = \{z \in U, u(z) = 0\}$$

Comme u est continue, F est fermé et d'intérieur non vide. Montrons que $F = \mathring{F}$. Soit $z' \in \partial F$ et (z_n) une suite à termes dans $\mathring{F}$ convergeant vers z'. Comme $z' \in U$ ouvert, il existe $r' > 0$ avec $D(z', r') \subseteq U$ et quitte à supprimer les premiers termes de la suite, $z_n \in D(z', r')$ pour $n \in \mathbb{N}$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $r_n > 0$ avec $D(z_n, r_n) \subseteq \mathring{F} \cap D(z', r')$.
Par 6.1, $u = \Re f$ avec $f \in \mathcal{O}(D(z', r'))$. Donc f constante sur tout $D(z_n, r_n)$, f est constante sur $D(z', r')$, $u = 0$ sur $D(z', r')$ et enfin $z' \in \mathring{F}$.
L'ensemble F est un ouvert fermé non vide de U conxnexe donc $F = U$ et $u = 0$ sur U. ∎

Définition 6.2: Moyenne

La fonction $f : U \to \mathbb{C}$ vérifie la propriété de la moyenne si pour tout $\overline{D(a, r)} \subseteq U$,

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(a + re^{i\theta}\right) \,\mathrm{d}\theta$$

Proposition 6.2: Moyenne d'une Fonction Harmonique

Si f est harmonique, alors elle vérifie la propriété de la moyenne.

Démonstration. D'après la proposition 6.1, sur l'ouvert simplement connexe $D(a, r+\varepsilon)$, $f = \Re\varphi$ avec $\varphi : D(a, r+\varepsilon) \to \mathbb{C}$ holomorphe. D'après la formule de Cauchy

$$\varphi(a) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D(a,r)} \frac{\varphi(u)}{u-a} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi\left(a + re^{i\theta}\right) \mathrm{d}\theta$$

En passant à la partie réelle des deux côtés, on a le résultat. ∎

Théorème 6.3: Harmonicité et Moyenne

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui vérifie la propriété de la moyenne. Alors f est harmonique.

Démonstration. Si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, écrivons son développement de Taylor au point a :

$$\begin{aligned} f\left(a + re^{i\theta}\right) =& f(a) + r\cos(\theta)\,\partial_x f(a) + r\sin\theta\partial_y f(a) + \\ &+ \frac{1}{2}\left(r^2\cos^2(\theta)\,\partial_{x,x} f(a) + 2r^2\cos\theta\sin\theta\partial_{x,y} f(a) + r^2\sin^2\theta\partial_{y,y} f(a)\right) + \varepsilon(r,\theta) \end{aligned}$$

avec $\varepsilon(r,\theta) = \mathcal{O}\left(r^3\right)$ pour $0 < r \leq R$ si $\overline{D(a,R)} \subset U$. En prenant la moyenne sur $\partial D(a,r)$, on a :

$$f(a) = f(a) + \frac{r^2}{4}\left(\partial_{x,x} f(a) + \partial_{y,y} f(a)\right) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varepsilon(r,\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

Donc $\Delta f = \frac{-2}{r^2\pi}\int_0^{2\pi} \varepsilon(r,\theta)\,\mathrm{d}\theta$ donc $\Delta f = 0$ et f est harmonique.
Pour conclure, il suffit donc de montrer que la propriété de la moyenne implique la classe $\mathcal{C}^\infty$
Notons

$$U_\varepsilon = \left\{ z \in U \middle| d\left(z, U^{\complement}\right) > \sqrt{\varepsilon} \right\}$$

Soit $\psi_\varepsilon : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ de support inclus dans $[0,\varepsilon]$ et $\int_0^{+\infty} \psi_\varepsilon = 1$. Enfin, pour $z \in U_\varepsilon$, posons

$$F(z) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(u)\,\psi_\varepsilon\left(|u-z|^2\right)\mathrm{d}u$$

où $\mathrm{d}u$ désigne la mesure de Lebesgue. D'après le théorème de dérivation sous le signe somme, la fonction F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U et

$$F(z) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(u-z)\,\psi_\varepsilon\left(|u|^2\right)\mathrm{d}u = \int_0^{\sqrt{\varepsilon}} \psi_\varepsilon\left(r^2\right)\left(\int_0^{2\pi} f\left(z + re^{i\theta}\right)\mathrm{d}\theta\right) r\,\mathrm{d}r$$

D'après la propriété de la moyenne,

$$F(z) = 2\pi f(z)\int_0^{\sqrt{\varepsilon}} \psi_\varepsilon\left(r^2\right) r\,\mathrm{d}r = \pi f(z)$$

Donc f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ comme F. ∎

Corollaire 6.6: Fermeture des Fonctions Harmoniques

L'ensemble des fonctions harmoniques sur U est un fermé de $\mathcal{C}^0(U,\mathbb{R})$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact inclus dans U.

Théorème 6.4: Principe du Maximum

Soit $U \subseteq \mathbb{R}$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction continue satisfaisant la propriété de la moyenne. Si $|f|$ admet un maximum local en $a \in U$, alors f est constante sur la composante connexe de U contenant a.

Démonstration. Si $f(a) = 0$, le résultat est clair. Supposons $f(a) \neq 0$. Quitte à multiplier f par une constante complexe, nous pouvons supposer $f(a) \in \mathbb{R}_+^*$. Choissons $r \geq 0$ assez petit, tel que $M(r) = \sup_\theta \left|f\left(a + re^{i\theta}\right)\right| \leq |f(a)|$. D'après la propriété de la moyenne,

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(a + re^{i\theta}\right) \mathrm{d}\theta$$

donc $f(a) = M(r)$. Ainsi, $g(z) = \Re(f(a) - f(z)) \geq 0$ pour $|z - a| = r$ et $g(z) = 0$ si et seulement si $f(z) = f(a)$. Or, la valeur moyenne de $g(z)$ sur le cercle de centre a et de rayon r est nulle. Comme g est continue positive, $g = 0$ sur ce cercle et donc $f = f(a)$ pour $|z - a| = r$.
La fonction harmonique f coïncide avec une fonction constante à $f(a)$ sur $D(a, r)$. D'après le corollaire 6.5, $f = f(a)$ sur la composante connexe de U contenant a. ■

Corollaire 6.7: Bornitude et Constance

Supposons U connexe borné. Soit $f : \overline{U} \to \mathbb{C}$ continue possédant la propriété de la moyenne dans U. Soit $M = \sup_{z \in \partial U} |f(z)|$. Alors,

1. $|f(z)| \leq M, z \in U$
2. Si $|f(a)| = M$ en $a \in U$ alors f est constante.

Démonstration. Comme $z \mapsto |f(z)|$ est continue sur $\overline{U}$ compact, il existe $a \in \overline{U}$ avec $|f(a)| = \sup_{z \in \overline{U}} |f(z)| = M'$. Si $a \in U$, par le principe du maximum, f est constante sur un ouvert fermé non vide de U connexe donc f est constante sur U. Comme f est continue, f est constante sur $\overline{U}$. Si $|f(a)| \neq M'$ pour tout $a \in U$, alors $M = M'$ et le corollaire suit. ■

6.4 Formule de Poisson

Proposition 6.3: Formule de Poisson

Soit $g : U \to \mathbb{R}$, harmonique et $\overline{D(a, R)} \subseteq U$. Alors, pour tout $z \in D(a, R)$,

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - |z - a|^2}{\left|a + Re^{i\theta} - z\right|^2} g\left(a + Re^{i\theta}\right) \mathrm{d}\theta$$

Démonstration. Quitte à translater, il suffit de traiter le cas $a = 0$. D'après le corollaire 6.1, dans le disque $D(0, R)$, g est la partie réelle d'une fonction holomorphe $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ uniquement déterminée par la condition $f(0) \in \mathbb{R}$.

$$g\left(re^{i\theta}\right) = a_0 + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} r^n \left(a_n e^{in\theta} + \overline{a_n} e^{-in\theta}\right)$$

la convergence étant normale par rapport à $\theta \in [0, 2\pi]$. Les coefficients sont donnés par les formules intégrales :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g\left(Re^{i\theta}\right) \mathrm{d}\theta \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{g\left(Re^{i\theta}\right) \mathrm{d}\theta}{\left(Re^{i\theta}\right)^n}, n \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

Ainsi, par convergence normale, nous pouvons échanger les signes somme et intégrale et

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g\left(Re^{i\theta}\right) \left(1 + 2 \sum_{n \geq 1} \left(\frac{z}{Re^{i\theta}}\right)^n\right) \mathrm{d}\theta$$

Or, $1+2\sum_{n\geq 1}\left(\frac{z}{Re^{i\theta}}\right)^n = \frac{Re^{i\theta}+z}{Re^{i\theta}-z}$, d'où, pour $|z|<R$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g\left(Re^{i\theta}\right)\frac{Re^{i\theta}+z}{Re^{i\theta}-z}\,\mathrm{d}\theta$$

D'où le résultat en prenant la partie réelle des deux membres de l'égalité. ∎

Corollaire 6.8: Problème de Dirichlet Harmonique

Soit $u : \partial D(a,R) \to \mathbb{R}$ continue. Alors, il existe une unique fonction continue $f : \overline{D(a,R)} \to \mathbb{R}$ telle que $f_{|\partial D(a,R)} = u$ et f est harmonique sur $D(a,R)$.

Proposition 6.4: Inégalité d'Harnack

Soit $u : \overline{D(a,R)} \to \mathbb{R}_+$ continue harmonique dans $D(a,R)$. Si, $|z-a| = r$, alors :

$$u(a)\frac{R-r}{R+r} \leq u(z) \leq u(a)\frac{R+r}{R-r}$$

Démonstration. Les deux inégalités sont analogues. Montrons celle de droite :

$$\begin{aligned}u\left(a+re^{i\theta}\right) =& \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-t)+r^2}u\left(a+Re^{it}\,\mathrm{d}t\right)\\ \leq& \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R+r}{R-r}u\left(a+Re^{it}\right)\,\mathrm{d}t = u(a)\frac{R+r}{R-r}\end{aligned}$$

∎

Théorème 6.5: Harnack

Soit u_n une suite croissante de fonctions harmoniques sur U connexe. Alors, on a l'une des deux propositions suivantes

1. u_n converge uniformément sur tout compact de U vers u harmonique
2. u_n diverge vers $+\infty$.

Démonstration. Quitte à changer u_n en $u_n - u_0$, nous pouvons supposer que (u_n) est une suite de fonctions positives. Pour tout $z \in U$, la suite $u_n(z)$ est croissante donc convergente vers $u(z)$ ou divergente vers $+\infty$. Notons

$$A = \{z \in U |, u_n(z) \to +\infty\}, B = \{z \in U | u_n(z) \to u(z)\}$$

Soit $a \in U$ et $\overline{D}(a,R) \subseteq U$. Pour $z \in \overline{D}(a,R/2)$, $\frac{1}{3}u_n(a) \leq u_n(z) \leq 3u_n(a)$. Donc A et B sont ouverts, $A \cap B = \varnothing$, $A \cup B = U$ connexe donc $A = U$ ou $B = U$.
Si $a \in B$, soit $\varepsilon > 0$, il existe N tel que

$$0 \leq u_n(a) - u_m(a) < \frac{\varepsilon}{3}, n \geq m \geq N$$

Donc,

$$0 \leq u(z) - u_m(z) \leq \varepsilon, m \geq N, z \in D(a,R/2)$$

donc la convergence est uniforme sur tout compact de U.
Ainsi, u est harmonique par théorème de dérivation des limites. ∎

6.5 Couronnes du Plan

Lemme 6.1: Biholomorphisme de Couronnes

Soit $R_1, R_2 > 1$ et $\varphi : A_1 \to A_2$ un biholomorphisme entre les deux couronnes

$$A_1 = \{z \in \mathbb{C} | 1 < |z| < R_1\} \text{ et } A_2 = \{z \in \mathbb{C} | 1 < |z| < R_2\}$$

Pour toutes suites ω_j, ω_j' de A_1 qui convergent respectivement vers $\omega, \omega' \in \partial A_1$, avec $|\omega| = 1$ et $|\omega'| = R_1$, on a l'une des deux propositions suivantes :

1. $|\varphi(w_j)| \to 1$ et $\left|\varphi\left(w_j'\right)\right| \to R_2$
2. $|\varphi(w_j)| \to R_2$ et $\left|\varphi\left(w_j'\right)\right| \to 1$

Théorème 6.6: Biholomorphisme de Couronnes

Soit $R_1, R_2 > 1$. Les couronnes $A_1 = C(0, 1, R_1)$ et $A_2 = C(0, 1, R_2)$ sont biholomorphes si et seulement si $R_1 = R_2$.

Deuxième partie
Fonctions Méromorphes

7 Théorème des Résidus

7.1 Développement en Séries de Laurent

Définition 7.1: Série de Laurent

Une série de Laurent est une série de la forme

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (z - a)^n$$

Pour qu'elle est un sens, il faut que $\sum_{n \geq 0} a_n (z - a)^n$ ait un rayon de convergence $R_2 > 0$ et que $\sum_{n \leq 0} a_n (z - a)^n$ ait un rayon de convergence $\frac{1}{R_1}$ où on a

$$0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty$$

Théorème 7.1: Séries de Laurent et Fonctions Holomorphes

Si $f \in \mathcal{O}(U)$, si $V = \{z \mid R_1 < |z - a| < R_2\}$ est une couronne inclue dans U, $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - a)^n$ sur V, les coefficients a_n étant uniques.

Démonstration. **Unicité** Pour $f = 0 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - a)^n$. Mais, si $R_1 < r < R_2$

$$\int_{\partial D(0,r)} z^n \, \mathrm{d}z = \begin{cases} 0 & n \neq -1 \\ 2\pi & n = -1 \end{cases}$$

Comme de plus :

$$\int_{\partial D(0,r)} f(\omega) \, \omega^{-p-1} \, \mathrm{d}\omega = a_p 2\pi = 0$$

On a bien, pour tout p, $a_p = 0$.
Donc on a bien l'unicité du développement en prenant la différence des deux développements.

Existence Pour $R_1 < r_1 < |z-a| < r_2 < R_2$, on a :

$$2i\pi f(z) = \int_{\partial D(a,r_2)} \frac{f(u)}{u-z}\,\mathrm{d}u - \int_{\partial D(a,r_1)} \frac{f(u)}{u-z}\,\mathrm{d}u$$

- Sur $\partial D(a, r_2)$,

$$\frac{1}{u-z} = \frac{1}{u-a-(z-a)} = \sum_{n\geq 0} \frac{(z-a)^n}{(u-a)^{n+1}}$$

$$\int_{\partial D(a,r_2)} \frac{f(z)}{u-z}\,\mathrm{d}z = \sum_{n\geq 0} (z-a)^n \int_{\partial D(a,r_2)} \frac{f(u)}{(u-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}u$$

- De même, sur $\partial D(a, r_1)$, on a :

$$\begin{aligned}
-\int_{partialD(a,r_1)} \frac{f(u)}{u-z}\,\mathrm{d}u &= -\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(z-a)^{n+1}} \int_{\partial D(a,r_1)} f(u)(u-a)^n\,\mathrm{d}u \\
&= -\sum_{n\leq -1} (z-a)^n \int_{\partial D(a,r_1)} \frac{f(u)}{(u-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

Finalement, on a :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\left(\sum_{n\geq 0}(z-a)^n \int_{\partial D(a,r_2)} \frac{f(u)}{(u-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}u - \sum_{n\leq -1}(z-a)^n \int_{\partial D(a,r_1)} \frac{f(u)}{(u-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}u\right)$$

■

Définition 7.2: Singularité

Soit $f : U \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Le point a est dit singularité de f. Il existe $r > 0$ tel que $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-a)^n$ pour $0 < |z| < r$.

1. Si $a_n = 0, n < 0$, la singularité en a est dite *singularité apparente* et f se prolonge en une fonction holomorphe sur U.
2. S'il existe $k < 0$ tel que $a_n = 0, n < k$, le point a est dit *pôle* d'ordre k ou *singularité isolée* et la fonction $(z-a)^k f(z)$ est holomorphe sur U.
3. Si $a_n \neq 0$ pour une infinité de $n < 0$, alors, la singularité en a est dite *singularité essentielle.*

7.2 Théorème des Résidus

Définition 7.3: Résidu d'une fonction

Soit $f : \{z | R_1 < |z-a| < R_2\} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Le résidu de f au point a est le coefficient a_{-1} de son développement de Laurent

$$\mathrm{Res}(f, a) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(u)\,\mathrm{d}u$$

avec $\gamma = \partial D(a, r)$ pour $R_1 < r < R_2$.

Proposition 7.1: Exemple Très Utile

1. Si $f(z) = \frac{f_1(z)}{(z-a)^m}$ où $f_1 \in \mathcal{O}(V_a), f_1(a) \neq 0$, alors $\operatorname{Res}(f,a)$ est le coefficient $(z-a)^{m-1}$ du développement en série de Taylor de f_1, $\operatorname{Res}(f,a) = \frac{f_1^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}$. Pour un pôle simple, c'est simplement $f_1(a)$.
   Par exemple, $f(z) = \frac{z}{(z^2+1)^2}$ s'écrit $\frac{f_1(z)}{(z-i)^2}$ avec $f_1(z) = \frac{z}{(z+i)^2}$. On a donc $\operatorname{Res}(f,i) = f_1'(i) = 0$.
2. Si $f = \frac{g}{h}$, avec $g(a) \neq 0$ et h a une racine simple en a, alors $\operatorname{Res}(f,a) = \frac{g(a)}{h'(a)}$.

Théorème 7.2: des Résidus

Soit U un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_i \in U^n$ n points distincts de U. Soit f holomorphe sur $U \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$ et γ un lacet de U évitéant les a_i. Alors,

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2i\pi \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Res}(f, a_i)\, j(a_i, \gamma)$$

Démonstration. La fonction f admet un développement en série de Laurent dans un voisinage de chacun des points a_k : $f(z) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} b_l^{(k)} (z-a_k)^l$. Posons

$$u_k(z) = \sum_{l=1}^{\infty} b_{-l}^{(k)} \frac{1}{(z-a_k)^l}, 1 \leq k \leq n \text{ et } g(z) = f(z) - u_1(z) - \cdots - u_n(z)$$

La fonction g est holomorphe sur $U \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$ et les a_i sont des singularités apparentes de g. En effet, si $D(a_k, r) \subseteq U \setminus \{a_1, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots, a_n\}$, sur $D(a_k, r) \setminus \{a_k\}$:

$$g(z) = (f(z) - u_k(z)) - \sum_{j \neq k} u_j(z)$$

est prolongeable en une fonction holomorphe sur $D(a_k, r)$, donc g est prolongeable en une fonction holomorphe sur U. Comme U est simplement connexe, le théorème de Cauchy 2.1 sur le lacet γ de U implique

$$\int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Mais, pour $1 \leq k \leq n$, $\int_\gamma u_k(z)\,\mathrm{d}z = 2i\pi \operatorname{Res}(u_k, a_k)\, j(a_k, \gamma)$. D'où

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2i\pi \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Res}(f, a_i)\, j(a_i, \gamma)$$

■

Proposition 7.2: Quelques Applications - 1

Intégrale Trigonométriques Soit $a \in]1, +\infty[$,

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{a + \sin t}$$

En posant $z = e^{it}$, on a :

$$I = \int_{|z|=1} \frac{2\,\mathrm{d}z}{z^2 - 1 + 2aiz}$$

Les pôles sont en $z_\pm = -ai \pm i\sqrt{a^2-1}$ et seul $|z_+| < 1$. Ainsi, $j\left(z_+, \partial D\left(0,1\right)\right) = 1$ et $j\left(z_-, \partial D\left(0,1\right)\right) = 0$. Par le théorème des résidus 7.2, on obtient

$$I = 2i\pi Res\left(f, z_+\right) = 2i\pi\left(\frac{2}{\left(z^2-1+2aiz\right)'}\right)\left(z_+\right) = 2i\pi\frac{2}{2z_+ + 2ai} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

Intégrale d'une Fonction Rationnelle Soit $P, Q \in \mathbb{R}\left[X\right]$ avec $\deg Q \geq \deg P + 2$ et Q sans racine réelle. Soit

$$f = \frac{P}{Q} \text{ et } I = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x\right)\,\mathrm{d}x$$

Les hypothèses garantissent que I converge et

$$I = \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f\left(x\right)\,\mathrm{d}x$$

Considérons la fonction de la variable complexe f et le contour $\gamma_R = [-R, R] \cup S_R$ où S_R désigne le demi-cercle de centre 0 de rayon R sur le demi-plan $\Im z \geq 0$ parcouru dans le sens trigonométrique. Par théorème des Résidus 7.2, on a :

$$\int_{\gamma_R} f\left(z\right)\,\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} f\left(x\right)\,\mathrm{d}x + \int_{S_R} f\left(z\right)\,\mathrm{d}z = 2i\pi\sum_{a_j, |a_j < R|, \Im(a_j)>0}\mathrm{Res}\left(f, a_j\right)$$

où les a_j sont les racines de Q. Posons

$$\alpha = \lim_{|x|\to+\infty} x^2\left|f\left(x\right)\right|$$

Quand $R \to \infty$, $\left|\int_{S_R} f\,\mathrm{d}z\right| \leq \pi R\frac{\alpha+1}{R^2}$ tend vers 0. Donc,

$$I = 2i\pi\sum_{a_j, \Im a_j > 0}\mathrm{Res}\left(\frac{P}{Q}, a_j\right)$$

Par exemple,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^4+1} =& 2i\pi\left(\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^4+1}, e^{i\pi/4}\right) + \mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^4+1}, e^{3i\pi/4}\right)\right)\\
=& 2i\pi\left(e^{-3i\pi/4}/4 + e^{-i\pi/4}\right)\\
\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^4+1} =& \frac{\pi}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Proposition 7.3: Quelques Applications - 2

Intégrales de Fourier On calcule la transformée de Fourier pour f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ sans singularité sur l'axe réel avec $\lim\limits_{|z|\to\infty, \Im(z)\geq 0} f(z) = 0$ et telle que l'intégrale soit absolument convergente.
On considère γ_R comme pour l'intégrale d'une fonction rationnelle. On montre de même que

$$\int_{S_R} e^{iz} f(z) \, \mathrm{d}z \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

On obtient alors $I = 2i\pi \sum_{a_j, \Im(a_j)>0} \mathrm{Res}\left(f(z) e^{iz}, a_j\right)$.

Intégrale Logarithmique On calcule

$$I = \int_0^{+\infty} f(x) \log(x) \, \mathrm{d}x$$

où $f \in \mathbb{R}(X)$ de degré ≤ -2. On introduit le contour $\gamma_{r,R} = C_r \cup L_- \cup C_r \cup L_+$ où C_r, C_R sont les cercles de centre 0 et de rayon r (resp. R) privés d'un petit arc de cercle pour éviter le demi arc réel positif. Les notations L_- et L_+ désignent

$$L_+ = \{z = t + i\varepsilon \mid r \leq t \leq R\} \text{ et } L_- = \mathrm{conj}(L_+)$$

pour ε que l'on fait tendre vers 0. En calculant avec le théorème des résidus quand $r \to 0$ et $R \to \infty$, on trouve :

$$\int_0^{+\infty} \ln(x) f(x) \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{2} \sum_a \mathrm{Res}\left((\log z - i\pi)^2 f(z), a\right)$$

où la somme porte sur les zéros de Q.

Transformation de Mellin On calcule, pour $\alpha \in]0,1[$ l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{F(x)}{x^\alpha} \, \mathrm{d}x$$

On prolonge x^α par la fonction $z^\alpha = \exp(\alpha \log(z))$ où $\log\left(\rho e^{it}\right) = \log \rho + it$ pour $t \in]0, 2\pi[$. On reprend alors le contour utilisé pour les intégrales logarithmiques. On obtient alors

$$I\left(1 - e^{-2i\pi\alpha}\right) = 2i\pi \sum_a \mathrm{Res}\left(\frac{F(z)}{z^\alpha}, a\right)$$

pour a les singularités de F.

7.3 Résidus à l'Infini

Définition 7.4: Singularité Isolée

La fonction holomorphe $f : \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq R\} \to \mathbb{C}$ admet une singularité isolée en ∞ si la fonction

$$g : \begin{array}{ccc} D\left(0, \frac{1}{R}\right) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & f\left(\frac{1}{z}\right) \end{array}$$

admet 0 comme singularité isolée.

Définition 7.5: Résidu à l'Infini

Soit f holomorphe admettant une singularité isolée en ∞. Le résidu à l'infini de f est défini par

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=\rho} f \, \mathrm{d}z, \rho > R$$

Lemme 7.1: Résidu de l'Inverse

Soit f holomorphe admettant une singularité isolée en ∞ et soit $g(z) = f(1/z)$. Alors

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = \operatorname{Res}\left(-g(\omega)\frac{1}{\omega^2}, 0\right).$$

Démonstration. Pour $\rho > R$, on a :

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=\rho} f \, \mathrm{d}z = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\omega|=\frac{1}{\rho}} \frac{-g(\omega)}{\omega^2} \, \mathrm{d}\omega = \operatorname{Res}(g(\omega)\frac{1}{\omega^2}, 0)$$

■

Corollaire 7.1: Singularité Isolées

Si f n'a que des singularités isolées en $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ et éventuellement en ∞, alors

$$\sum_{a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}} \operatorname{Res}(f, a) = 0$$

Démonstration. Soit R tel que $R \geq |a_i|$. On a :

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=R} f \, \mathrm{d}z = -\sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}(f, a_j)$$

D'où le résultat. ■

8 Singularités

8.1 Étude Locale

Théorème 8.1: du Prolongement de Riemann

Soit $f : U \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ holomorphe. Si f est bornée au voisinage de a alors a est une singularité apparente.

Démonstration. Les coefficients de Laurent vérifient les inégalités de Cauchy :

$$|a_n| \leq \frac{\sup_{\partial D(a,r)} |f(z)|}{r^n}$$

Donc pour $n < 0$, si f est bornée au voisinage de a en faisant tendre r vers 0, nous obtenons $a_n = 0, n < 0$. ■

Théorème 8.2: de Weierstrass

Soit U ouvert, $a \in U$, f holomorphe sur $U \setminus \{a\}$ avec a une singularité essentielle de f. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, $f(\{z | 0 < |z - a| < \varepsilon\})$ est dense dans $\mathbb{C}$.

Démonstration. Raisonnons par l'absurde en supposant

$$\exists b \in \mathbb{C}, r > 0, f\left(\{z | 0 < |z-a| < \varepsilon\}\right) \cap D(b,r) = \varnothing$$

Alors la fonction $g : D(a,\varepsilon) \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ qui à z associe $\frac{1}{f(z)-b}$ est holomorphe bornée au voisinage de a donc admet un prolongement holomorphe sur $D(a,\varepsilon)$ et un développement de la forme $g(z) = \sum_{n\geq 0} b_n (z-a)^n$. Notons b_k le premier coefficient non nul de g. On a :

$$f(z) = b + \frac{1}{g(z)} = b + \frac{1}{b_k(z-a)^k\left(1 + \sum_{n\geq k+1} \frac{b_n}{b_k}(z-a)^{n-k}\right)}$$

Donc f admet un développement de Laurent avec un pôle d'ordre k en a, ce qui est absurde. ■

8.2 Grand Théorème de Picard

Lemme 8.1: Domination Holomorphe

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$. Il existe une fonction

$$M : [1, +\infty[\times]0, R[\to \mathbb{R}^+$$

croissante en les variables A, r telle que toute application holomorphe $f : D(z_0, R) \to \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ vérifiant $A^{-1} \leq |f(z_0)| \leq A$ satisfait

$$|f(z)| \leq M(A,r), z \in \overline{D}(z_0, r)$$

Démonstration. Comme $D(z_0,R)$ est simplement connexe et $f(D(z_0,R)) \subseteq \mathbb{C}^*$, il existe une détermination du logarithme $f_1 = \frac{1}{2i\pi}\log f$ sur $D(z_0,R)$ telle que $0 \leq \Re f_1(z_0) \leq 1$. Nous avons $|\Im f_1(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi}\log A$, donc

$$|f_1(z_0) - j| \leq B = \sqrt{1 + \frac{1}{4\pi^2}(\log A)^2}, j = 0, 1$$

Comme $1 \notin f(D(z_0,R))$, $f_1(D(z_0,R)) \subseteq \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Il existe donc des fonctions f_2, f_3 holomorphes telles

$$f_2 = \sqrt{f_1} + \sqrt{f_1 - 1}, f_3 = \sqrt{f_1} - \sqrt{f_1 - 1}$$

Nous avons $f_2 f_3 = 1$, $|f_2| \leq 2\sqrt{B}$ et $|f_3| \leq 2\sqrt{B}$. Donc

$$C(A)^{-1} \leq |f_2(z_0)| \leq C(A), C(A) = 2\sqrt{B} = 2\left(1 + \frac{1}{4\pi^2}(\ln A)^2\right)^{1/4}$$

Or f_2 n'atteint jamais $\sqrt{n}+\sqrt{n-1}$ ni $\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Comme f_2 ne s'annule pas et $D(z_0,R)$ est simplement connexe, il existe une détermination holomorphe $f_4 = \log f_2$. Alors f_4 omet toutes les valeurs de l'ensemble

$$S = \left\{\pm \log\left(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}\right) + 2i\pi k \middle| n \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

On peut choisir un argument $-\pi < \Im f_4(z_0) \leq \pi$ de telle sorte que $|f_4(z_0)| \leq \sqrt{(\ln C(A))^2 + \pi^2}$. Les nombres $\pm \ln\left(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}\right)$ sont de moins en moins espacés quand n augmente, ce qui entraîne que le plus grand disque contenu dans $\mathbb{C} \setminus S$ a pour rayon

$$R_0 = \sqrt{\frac{1}{4}\left(\ln(\sqrt{2}+1)\right)^2 + \pi^2}$$

Pour $z \in D(z_0,R)$, le théorème de Bloch-Landau 4.8 applliqué au disque $D(z,\rho)$ avec $\rho = R - |z - z_0|$ montre que l'image de f_4 contient un disque de rayon supérieur à $\frac{1}{12}\rho|f_4'(z)|$. Or, $f_4(D(z_0,R)) \subseteq \mathbb{C} \setminus S$. Ainsi

$$|f_4'(z)| \leq 12\frac{R_0}{R - |z - z_0|}$$

Or, $f_4(z) = f_4(z_0) + \int_{z_0}^{z} f_4'(t)\,dt$ donc

$$|f_4(z)| \leq \sqrt{\left(\ln C(A)\right)^2 + \pi^2} + 12R_0 \ln \frac{R}{R-r} = T(A,r)$$

sur le disque $D(z_0, r)$. Ceci entraîne l'existence de majorations uniformes explicites pour $f_2 = \exp f_4$ et $f_2^{-1} = \exp - f_4$, $\sqrt{f_1} = \frac{1}{2}\left(f_2 + f_2^{-1}\right)$ et $f = \exp\left(2i\pi f_1\right)$:

$$\begin{aligned} |f_2(z)|^{\pm 1} &\leq \exp\left(T(A,r)\right) \\ |f_1(z)| &\leq \exp\left(2T(A,r)\right) \\ |f(z)| &\leq M(A,r) = \exp\left(2\pi \exp\left(2T(A,r)\right)\right) \end{aligned}$$

■

Théorème 8.3: Grand Théorème de Picard

Soit $f \in \mathcal{O}(D(z_0, r_0) \setminus \{z_0\})$ holomorphe avec une singularité essentielle en z_0. Pour tout voisinage V de z_0, $f(z)$ prend sur $V \setminus \{z_0\}$ une infinité de fois toutes les valeurs de $\mathbb{C}$ sauf au plus une.

Démonstration. On peut supposer $z_0 = 0$ par translation. Soit $V \subseteq D(0, r_0)$ un voisinage de 0. Supposons que $f(V \setminus \{0\}) \subseteq \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$. Quitte à remplacer f par $\frac{(f(z)-a)}{b-a}$, on peut supposer $a = 0, b = 1$. Pour $r \in]0, r_0[$, posons

$$\mu(r) = \inf_{|z|=r} |f(z)|\,, m(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$$

Montrons par l'absurde que $\lim_{r \to 0} m(r) = +\infty$. Sinon, il existe une suite $r_k \to 0$ telle que $m(r_k)$ est bornée. Le principe du maximum 4.5 sur les couronnes $\{z | r_{k+1} \leq |z| \leq r_k\}$ implique que f est bornée au voisinage de $z_0 = 0$ ce qui est exclu car f admet une singularité essentielle en 0. Par le même raisonnement appliqué à $1/f$, $\lim_{r \to 0} \mu(r) = 0$.
Pour r assez petit, $\mu(r) < 2 < m(r)$ et le théorème des valeurs intermédiaires garantit l'existence de $\theta_r \in [0, 2\pi[$ tel que $\left|f\left(re^{i\theta_r}\right)\right| = 2$. Pour $0 < r < r_0 e^{-2\pi}$, définissons

$$g_r : z \longmapsto f\left(re^{i\theta_r} e^{2i\pi z}\right)$$

Alors $g_r\left(D(0,1)\right) \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, $|g_r(0)| = \left|f\left(re^{i\theta_r}\right)\right| = 2$. Le lemme précédent 8.1 garantit l'existence d'une constance $M(2, 1/2)$ telle que les fonctions g_r soient uniformément bornées par $M(2, 1/2)$ sur $\overline{D}(0, 1/2)$. Or $g_r\left([-1/2, 1/2]\right)$ décrit toutes les valeurs atteintes par f pour $|z| = r$. Donc $m(r) \leq M(2, 1/2)$ pour tout $r < r_0 e^{-2\pi}$ ce qui est absurde.
Par conséquent, pour tout voisinage $V \setminus \{0\}$ de 0, $f(V \setminus \{0\})$ atteint toute valeur de $\mathbb{C}$ sauf au plus une. En réduisant la taille des voisinages, $f(V \setminus \{0\})$ prend une infinité de fois toutes valeurs de $\mathbb{C}$ sauf au plus une. ■

Corollaire 8.1: Petit Théorème de Picard

Soit $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ non constante. Alors f prend toutes les valeurs complexes sauf éventuellement une.

Démonstration. Les polynômes non constants prennent toutes les valeurs complexes, mais seulement un nombre fini de fois. Supposons que $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ n'est pas un polynôme et notons $f(z) = \sum a_n z^n$. La fonction $g(z) = f(1/z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ avec

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$$

Comme f n'est pas un polynôme, g admet une singularité essentielle en 0. Donc g et f atteignent une infinité de fois toutes les valeurs compelxes sauf éventuellement une. ■

Corollaire 8.2: Points Fixes

Soit f holomorphe qui n'est pas une translation. Alors $f \circ f$ admet un point fixe.

Démonstration. Par l'absurde, si $f \circ f$ n'a pas de point fixe, f n'a pas de point fixe et

$$g(z) = \frac{f(f(z)) - z}{f(z) - z} \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$$

évite les valeurs 0 et 1. Par le petit théorème de Picard 8.1, $g = c \neq 1$ est constante et

$$f(f(z)) - z = c(f(z) - z), z \in \mathbb{C}$$

Par conséquence $f'(z)(f'(z)(f(z)) - c) = 1 - c$. Comme $c \neq 1$, la fonction holomorphe $f' \circ f$ ne prend pas la valeur c. S'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ avec $f' \circ f(z_0 = 0$ alors pour $z = f(z_0)$, on obtient $c = 1$ ce qui est exclu. Donc $f' \circ f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ évite les valeurs c et 1 donc est constante par le petit théorème de Picard. Donc f' est constante et donc $f = az + b$. Comme f n'est pas une translation, $a \neq 1$ et donc f a un point fixe. ■

9 Théorème de Rouché

9.1 Fonctions Méromorphes

Définition 9.1: Corps des Fractions Méromorphes

Soit U connexe. L'anneau $\mathcal{O}(U)$ est intègre. Nous notons $\mathcal{F}(U)$ son corps des fractions.

Définition 9.2: Fonction Méromorphe

Une fonction $f : U \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ est dite méromorphe si f est holomorphe sur un ouvert U' de U avec $U \setminus U'$ discret et si tout point z_0 de U admet un voisinage ouvert connexe dans U tel que $f_{|V_{z_0}} \in \mathcal{F}(V_{z_0})$

Proposition 9.1: Propriétés des fonctions Méromorphes

- L'ensemble des fonctions méromorphes sur U est une $\mathbb{C}$-algèbre. Si U est connexe, $\mathcal{M}(U)$ est un corps.
- Soit f méromorphe au voisinage de z_0. Alors, il existe une fonction holomorphe g au voisinage de z_0 telle que $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$ avec $g(z_0) \neq 0$. Si $m \neq 0$ la fonction $\log f(z)$ n'est pas définie au voisinage de z_0 mais sa dérivée logarithmique l'est.
- Une fonction $f : U \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ est méromorphe si et seulement si elle holomorphe en dehors d'une suite de points singuliers localement finie dans U et si tous ces points singuliers sont des pôles. Les fonctions rationnelles sont méromorphes sur $\mathbb{C}$. La fonction $(\sin(1/\pi z))^{-1}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}^*$ mais pas sur $\mathbb{C}$.

9.2 Principe de l'Argument

Définition 9.3: Ordre

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, $a \in U$. Soit f méromorphe sur U. On définit l'ordre de f en a par

$$\operatorname{ord}(f, a) = \begin{cases} n & \text{si } a \text{ est un zéro d'ordre } n \\ -n & \text{si } a \text{ est un pôle d'ordre } n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Théorème 9.1: Principe de l'Argument

Soit f méromorphe sur U et un γ un lacet de U ne contenant ni pôle ni zéro de f.

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'}{f}\,\mathrm{d}z = \sum_a j(a,\gamma)\mathrm{ord}(f,a)$$

où a parcour l'ensemble des zéros et pôles de f à l'intérieur de γ.

Démonstration. Si $a \in U$ est un pôle ou un zéro de f, alors a est un pôle simple de $\frac{f'}{f}$ avec un résidu égal à $\mathrm{ord}(f,a)$ car

$$f(z) = (z-a)^m f_1(z)$$

On déduit alors le résultat du théorème des résidus 7.2 ■

Proposition 9.2: Quelques Corollaires

- Si γ est une courbe simple fermée :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'}{f}\,\mathrm{d}z = \#\text{zéros}f - \#\text{pôles}f$$

- On a :

$$\Re\left(\frac{1}{2i\pi}\frac{f'}{f}\right) = \Re\left(\frac{1}{2i\pi}\frac{\mathrm{d}\log(f)}{\mathrm{d}z}\right) = \Re\left(\frac{1}{2i\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\log|f| + i\arg f)\right) = \frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\arg f$$

- Si g est holomorphe :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma g\frac{f'}{f}\,\mathrm{d}z = \sum_a g(a)j(a,\gamma)\mathrm{ord}(f,a)$$

Proposition 9.3: Injectivité sur un Voisinage

Soit f holomorphe sur U, $\overline{\Delta} \subseteq U$ tel que $f_{|\overline{\Delta}}$ est injective et $f(\Delta)$ est ouvert. Alors $f : \Delta \to V$ est bijective et

$$f^{-1}(q) = \int_{\partial\Delta} z\frac{f'(z)}{f(z)-q}\,\mathrm{d}z$$

En particulier, f^{-1} est holomorphe.

9.3 Fonctions Elliptiques

Dans la suite, on pose $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ avec $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{R}$et on définit le réseau $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$

Définition 9.4: Fonction Elliptique

Une fonction f est dite *elliptique* si elle est méromorphe sur $\mathbb{C}$ et si f est Λ-périodique :

$$f(z) = f(z+\omega_1) = f(z+\omega_2), \forall z \in \mathbb{C}$$

Proposition 9.4: Propriétés

- L'ensemble des fonctions elliptiques est un corps stable par dérivation.
- Soit f elliptique holomorphe et P_A un parallélogram fondamental de Λ. Comme f est holomorphe sur $\mathbb{C}$, $f_{|\overline{P_A}}$ est continue. Comme f est périodique, f est bornée donc constante.

On rappelle qu'un paralléllogramme est de la forme

$$P_a = \{a + t_1\omega_1 + t_2\omega_2 | 0 \leq t_1 < 1, 0 \leq t_2 < 1\}$$

Lemme 9.1: Sans zéros

Soit f elliptique. Il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que ∂P_a ne contient ni zéro ni pôle de f.

Démonstration. L'ensemble des pôles et zéros est discret et $\overline{P_a}$ est compact donc il n'en contient qu'un nombre fini. ∎

9.4 Théorème de Rouché

Théorème 9.2: Rouché

Soit U ouvert, $D(a,r) \subseteq U$, $f, g \in \mathcal{M}(U)$ sans pôle ni zéro sur $\partial D(a,r)$ et telles que $|f - g| < |f|$ au bord. Alors, dans $D(a,r)$:

$$\#\text{zéros} f - \#\text{pôles} f = \#\text{zéros} g - \#\text{pôles} g$$

Démonstration. On pose $h\frac{g}{f}$ sur $D(a,r)$. Soit γ le lacet bord de $D(a,r)$ et $\Gamma = h \circ \gamma$. La fonction $\left|\frac{f(\gamma(t)) - g(\gamma(t))}{f(\gamma)(t)}\right|$ est définie et continue dans I donc atteint son maximum M en un point de I. Ainsi, $|h(\gamma(t)) - 1| \leq M < 1$ sur I. Le lacet Γ est donc inclus dans $D(0,1)$ simplement connexe et Γ ne contient pas 0. La fonction $\log h$ est définie sur $\gamma(I)$. Donc :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{h'(z)}{h(z)} = 0$$

Or, $\frac{h'}{h} = \frac{g'}{g} - \frac{f'}{f}$. Donc on a l'égalité attendu par principe de l'argument 9.1. ∎

Proposition 9.5: Quelques Applications

- Pour déterminer le nombre de racines de $f(z) = z^6 + 21z^4 + 2z + 3$ sur $D(0,1)$, on introduit $g(z) = 21z^4$. Le théorème de Rouché nous indique que f admet 4 zéros (autant que g).
- Plus généralement, pour $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n, g(z) = z^n$ et R assez grand, le théorème de Rouché 9.2 montre que f admet n zéros dans $\mathbb{C}$, i.e. que $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.
- Toutes les solutions de $z \sin z = 1$ sont réelles en appliquant le théorème de Rouché à $f(z) = z \sin z$ et $g(z) = z \sin z - 1$ sur le carré $\Delta = \left\{z \middle| |x| + |y| \leq \pi \left(n + \frac{1}{2}\right)\right\}$.

Corollaire 9.1: Point Fixe Méromorphe

Soit $f \in \mathcal{M}(U)$ avec $\overline{D(0,1)} \subseteq U$, $|f(z)| < 1$ pour $z \in \partial D(0,1)$. Alors f a un unique point fixe dans $D(0,1)$.

Démonstration. Posons $h(z) = f(z) - z$, $g(z) = -z$. Alors $|h - g| = |f| < 1 = |g|$ sur $\partial D(0,1)$. On conclut par théorème de Rouché. ■

Théorème 9.3: Hurwitz

Soit U connexe et $f_n \in \mathcal{O}(U)$ convergeant uniformément sur tout compact de U vers f. Si $\overline{D(z_0, R)} \subseteq U$ et f ne s'annule pas au bord de ce disque, alors, pour n assez grand f_n ne s'annule pas sur $\partial D(z_0, R)$ et f_n a autant de zéros que f sur ce disque.

Démonstration. On prend n assez grand pour que $|f_n - f| < \inf_{\partial K} |f|$ sur $\partial D(z_0, R)$. ■

Corollaire 9.2

Soit U un ouvert connexe, $f_n \in \mathcal{O}(U)$ convergeant vers f uniformément sur tout compact avec f_n injective. Alors f est injective ou constante.

Démonstration. Supposons qu'il existe z_1, z_2 tels que $f(z_1) = f(z_2) = \omega$ et que $f(z) - \omega$ a ses zéros isolés. Alors $f(z) - \omega$ ne s'annule pas en dehors de z_1, z_2 sur $\overline{D(z_1, r_1)} \cup \overline{D(z_2, r_2)}$. Par théorème de Hurwitz, $f_n - \omega$ a le même nombre de zéros que $f - \omega$ à partir d'un certain rang sur $D(z_1, r_1)$ et $D(z_2, r_2)$. Donc f_n n'est pas injective, contradiction ! ■

9.5 Théorème de l'Application Conforme de Riemann

Lemme 9.2: Isomorphisme d'ouverts

Soit $U \subsetneq \mathbb{C}$ simplement connexe, il existe U' inclus dans un compact isomorphe à U

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{C} \setminus U$. Comme U est simplement connexe il existe une détermination du logarithme $g(z) = \log(z - a)$ sur U qui de plus est injective. Soit $z_0 \in U$. Par théorème d'inversion globale 4.4, il existe $D(g(z_0), r) \subset g(U)$. Comme g est une détermination du logarithme, le disque $D(g(z_0), r) + 2i\pi$ ne contient aucun point de $g(U)$. Ainsi, pour tout $z \in U$, $|g(z) - g(z_0) - 2i\pi| \geq r > 0$. La fonction

$$h : z \longmapsto \frac{1}{g(z) - g(z_0) - 2i\pi}$$

est holomorphe, injective et bornée sur U. Par théorème d'inversion globale 4.4, $h : U \to U'$ est un isomorphisme ou $U' \subseteq \overline{D\left(0, r^{-1}\right)}$ ■

Lemme 9.3: Isomorphisme et Image dans le Disque Unité

Soit U un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$ contenant 0. Soit

$$A = \{f \in \mathcal{O}(U) \mid f \text{ injective}, f(0) = 0, \forall z \in U\, |f(z)| < 1\}$$

Alors, pour $f \in A$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $f(U) = D(0,1)$
2. $|f'(0)|$ est maximum sur A.

Démonstration. $i \Rightarrow ii$ D'après le théorème d'inversion globale 4.4, les éléments de A sont des isomorphismes sur leur image. Soit $f \in A$ d'image $D(0,1)$. Alors $h = g \circ f^{-1} : D(0,1) \to g(U)$ est un isomorphisme tel que $h(0) = 0$. Par le lemme de Schwarz 4.6, $|h'(0)| \leq 1$ donc $|g'(0)| \leq |f'(0)|$ et $|f'(0)|$ est maximum.

ii $\Rightarrow$ *i* On montre $\neg i \Rightarrow \neg ii$. Soit $f \in A$ et $a \in D(0,1)$ avec $a \notin f(U)$. Soit $\varphi_a \in \mathrm{Aut} D(0,1)$: $z \mapsto \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$. Comme $f(U)$ est simplement connexe, $F(z) = \log \varphi_a f(z)$ est définie holomorphe et injective dans U et $\Re F(z) < 0$. Pour $u, v \in \mathbb{C}$ avec $\Re u, \Re v < 0$, on a : $\left|\frac{v-u}{v+\bar{u}}\right| < 1$.
Ainsi, $g(z) = \frac{F(z)-F(0)}{F(z)+\overline{F(0)}}$ est holomorphe injective dans U, $g(0) = 0$, $|g(z)| < 1$ et donc $g \in A$. Enfin

$$\left|\frac{g'(0)}{f'(0)}\right| = \frac{1-|a|^2}{2|a|\log\left|\frac{1}{a}\right|} > 1$$

car $|\varphi_a'(0)| = 1 - |a|^2, |\varphi_a(0)| = |a|, \Re F(0) = \log|1/A|$

■

Théorème 9.4: de l'Application Conforme de Riemann

Tout ouvert simplement connexe U de $\mathbb{C}$, distinct de $\mathbb{C}$ est isomorphe à $D(0,1)$.

Démonstration. D'après le lemme 9.2, quitte à effectuer une homothétie et une translation nous pouvons supposer $0 \in U \subseteq D(0,1)$.
D'après le lemme 9.3, il suffit de prouver qu'il existe $f \in A$ telle que $\sup_{g\in A}|g'(0)| = |f'(0)|$. On munit $\mathcal{O}(U)$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact et on pose

$$B = \{f \in A | |f'(0)| \geq 1\}$$

Alors B est non vide et bornée dans $\mathcal{O}(U)$ car pour tout $z \in U, |f(z)| < 1$, donc pour tout compact $\sup_K |f| < 1$.
La partie B est fermée dans $\mathcal{O}(U)$. En effet, pour $f \in \overline{B}$ et f_n convergeant uniformément sur tout compact vers f, on a $f(0) = \lim f_n(0) = 0$ et de plus $f' = \lim f_n'$ d'où $|f'(0)| = \lim |f_n'(0)| \geq 1$. Ainsi f n'est pas constante et comme c'est une limite de fonctions holomorphes injectives, elle est injective. Comme $|f_n(z)| < 1$ sur $D(0,1)$, $|f(z)| \leq 1$ sur U et d'après le principe du maximum, comme f n'est pas constante, il n'existe pas de point $z \in U$ où $|f(z)| = 1$. Donc $f \in B$. Ainsi, B est fermée bornée dans $\mathcal{O}(U)$ donc compacte, d'où l'existence d'un maximum à $g \mapsto |g'(0)|$. ■

Corollaire 9.3: Homéomorphie d'Ouverts

Deux ouverts simplement connexes U et V de $\mathbb{C}$ distincts de $\mathbb{C}$ sont isomorphes.
Deux ouverts simplement connexes U et V de $\mathbb{C}$ sont homéomorphes.

10 Espaces de Fonctions Méromorphes

10.1 Séries de Fonctions Méromorphes

Définition 10.1: Uniforme Convergence

Soit (f_n) une suite de fonctions méromorphes sur U. La série de fonctions $\sum f_n$ est dite uniformément convergente sur une partie A de U s'il existe un sous-ensemble fini de J de $\mathbb{N}$ tel que :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus J$, f_n n'a pas de pôle dans A
2. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}\setminus J} f_n$ est uniformément convergente sur A

Théorème 10.1: Méromorphie de la Somme

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions méromorphes sur U. Si elle converge uniformément sur tout compact de U, alors sa somme f est méromorphe sur U. De plus la série $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout compact de U et sa somme est la fonction méromorphe f'.

Démonstration. Pour tout ouvert $V \subseteq K$ inclus dans un compact K de U, il existe n_0 tel que f_n n'ai pas de pôle dans K pour $n \geq n_0$, donc f_n est holomorphe sur V et

$$f = \sum_{n \leq n_0} f_n + \sum_{n > n_0} f_n$$

est méromorphe sur V. Par conséquent, f est méromorphe.
Sur K, la série $\sum_{n>n_0} f_n$ est uniformément convergente, donc $\sum f_n'$ l'est aussi. Ainsi, on a bien le résultat souhaité. ■

10.2 Produits Infinis

Le théorème ci-dessous est un rappel du théorème de convergence des produits infinis de fonctions holomorphes **??**

Théorème 10.2: Produits Holomorphes

Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et (f_n) une suite de fonctions non nulles holomorphes telle que la série $\sum |f_n - 1|$ converge uniformément sur tout compact de U. Alors, la suite des produits $(\prod_{k=0}^{n} f_k)$ converge uniformément sur tout compact de U vers une fonctions f non nulle holomorphe sur U.

Lemme 10.1

Soit $G(z) = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}$. Alors, G est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et ne s'annule que sur les entiers strictement négatifs et de plus :

1. Pour tout $z \notin \mathbb{Z}$, $G(z)G(-z) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi z}$
2. Pour tout $z \notin -\mathbb{N}$, $G(z-1) = zG(z)e^{\gamma}$ pour $\gamma = \lim \sum \frac{1}{k} - \log n$.

Définition 10.2: Fonction Gamma

La fonction Γ est la fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \frac{1}{\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}}$$

La fonction Γ admet pour seuls pôles simples les entiers strictement négatifs car

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \frac{\tan(\pi z)}{\pi}$$

Proposition 10.1: Propriétés de Gamma

1. $\Gamma(1) = 1$
2. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, en particulier $\Gamma(n) = (n-1)!$
3. (Formule des Compléments) $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$, en particulier $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.
4. $\Gamma(z) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{n!}{z(z+1)\cdots(z+n)} n^z$
5. $Res(\Gamma, -n) = \frac{(-1)^n}{n!}$

Ces propriétés découlent immédiatement des propriétés de G.

10.3 Problème de Weierstrass

Définition 10.3: Problème de Weierstrass

Le problème de Weierstrass est le suivant : étant donné une suite de complexes sans point d'accumulation, existe-t-il une fonction n'ayant des zéros qu'en ces complexes (comptés avec multiplicités) ?

Proposition 10.2: Sur les réponses au Problème

1. Si f_1, f_2, conviennent, alors $f_1 = f_2 e^h$ où $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$
2. Si la suite (a_n) n'a pas de valeur d'adhérence elle diverge vers ∞
3. On peut poser le problème sur tout ouvert U de $\mathbb{C}$.
4. On peut supposer tous les $a_k \neq 0$ quitte à multiplier par une puissance convenable la fonction solution.
5. Le problème est trivial pour une suite finie en prenant un polynôme.

Définition 10.4: Facteur Principal de Weierstrass

Le facteur principal de Weierstrass d'ordre $m \geq 1$ est la fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$

$$W_1(z) = (1-z), \ldots, W_m(z) = (1-z)\exp\left(\sum_{k=1}^{m-1} \frac{z^k}{k}\right)$$

Lemme 10.2: Distance Un-Facteur

Si $|z| \leq 1$ alors $|1 - W_p(z)| \leq |z|^p$

Démonstration. On écrit $W_p(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$. Par définition, $W_p(0) = 1$ donc $a_0 = 1$.

- On a :
$$W_p(z) = (1-z)e^u, u = z + z^2/2 + \cdots + z^{p-1}/(p-1)$$
Donc $W_p'(z) = -e^u + (1-z)u'e^u = -z^{p-1}e^u = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k z^{k-1}$. D'où, $a_1 = \cdots = a_{p-1} = 0$.
- Comme précédemment, pour $k \geq p$, a_k s'identifie au produit de $-1/k$ et du coefficient de z^{k-p} dans e^u. Or :
$$e^u = e^z e^{z^2/2} \cdots e^{z^{p-1}/(p-1)}$$
Donc $a_k \in \mathbb{R}_-$ pour $k \geq p$.
- En $z = 1$ on a :
$$0 = W_p(1) = 1 + \sum_{k=p}^{+\infty} a_k$$
d'où, $\sum_{k \geq p} a_k = 1$.

Ainsi, pour $|z| \leq 1$, on a :

$$|W_p(z) - 1| = \left|\sum_{k=p}^{+\infty} a_k z^k\right| \leq |z|^p$$

■

Lemme 10.3: Produit Fini

Soit (a_n) une suite complexe qui diverge vers ∞. Alors, il existe une suite d'entiers naturels (p_n) telle que

$$\forall r > 0, \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{|a_n|}\right)^{p_n} < +\infty$$

Démonstration. En prenant $p_n = n$ on a le résultat. En effet, pour $r > 0$, comme a_n diverge, àpcr, $|a_n| > r/2$ et donc par comparaison à une série géométrique, on a le résultat. ∎

Théorème 10.3: Solution au problème de Weierstrass

Soit a_n une suite complexe sans point d'accumulation. Il existe une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ dont les zéros sont exactement les a_n comptés avec multiplicité.

Démonstration. Soit p_n une suite satisfaisant les hypothèses du lemme précédent 10.3 et $f_n = W_{p_n}(z/a_n - 1$. Ainsi, sur $\overline{D}(0, r)$ pour $n \geq N$ assez grand,

$$|f_n(z)| = |W_{p_n}(z/a_n) - 1| \leq |z/a_n|^{p_n} \leq (r/\,|a_n|)^{p_n}$$

Comme $\sum (r/\,|a_n|)^{p_n} < \infty$, $\sum |f_n|$ converge uniformément sur $\overline{D}(0, r)$ et $\prod (f_n + 1)$ converge localement uniformément sur $\mathbb{C}$ vers une solution du problème de Weierstrass. ∎

Corollaire 10.1: Méromorphie et Holomorphie

Toute fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ est le queotient de deux fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$.

Démonstration. Soit h méromorphe sur $\mathbb{C}$. Soit P le multi-ensemble des pôles de h avec multiplicités. Il existe g solution du problème de Weierstrass pour P. La fonction $f = \frac{h}{g}$ est alors holomorphe sur $\mathbb{C}$. ∎

Corollaire 10.2: Pareil qu'au-dessus en fait

Toute fonction $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ non nulle s'écrit

$$f(z) = z^m e^h \prod_n W_{p_n}(z/a_n)$$

où $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C}), a_n \in \mathbb{C}^*, p_n \in \mathbb{N}$ et h, p_n ne sont pas définies de façon unique.

On retrouve ici une analogie avec la factorisation des entiers en produit d'une unité et de nombre premiers.

Définition 10.5: Genre

L'entier $s \in \mathbb{N}$ minimum avec $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{|a_n|^s} < +\infty$, s'il existe, est dit *genre* du produit canonique $\prod_{n\geq 1} W_s(z/a_n)$.

Théorème 10.4: de Weierstrass

Soit U un ouvert non trivial de $\mathbb{C}$ et $(a_i)_{i\in I}$ une suite (éventuellement finie) d'éléments de U sans point d'accumulation. Alors, il existe une fonction holomorphe sur U dont les zéros sont exactement les a_i avec multiplicités.

Démonstration. Si I est fini, la fonction $f(z) = \prod(z - a_i)$ est solution. Sinon, on suppose $I = \mathbb{N}$ Comme la suite a_n n'admet pas de points d'accumulation dans U, nous avons $\max(|a_n|, d(a_n, \partial U)^{-1}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$. On construit une partition de $I = P \sqcup Q$ selon si $|a_n| \geq d(a_n, \partial U)^{-1}$ ou non.
Ainsi, $\lim_{n\in P, n\to\infty} |a_n| = +\infty$. La fonction $g(z) = \prod_{n\in P} W_n(z/a_n)$ converge et admet pour zéros avec multiplicté les a_n pour $n \in P$.
De même, $\lim_{n\in Q, n\to\infty} d(a_n, \partial U) = 0$. Pour tout $n \in Q$, soit $w_n \in \partial U$ tel que $|w_n - a_n| = d(a_n, \partial U)$ et

$$f_n(z) = W_n\left(\frac{a_n - w_n}{z - w_n}\right)$$

Soit $K \subseteq U$ un compact et $\delta = d(K, \partial U)$. Ainsi, $|z - w_n| \geq \delta, z \in K, n \in Q$. Comme $|a_n - w_n|$ tend vers 0 quand $n \in Q$ tend vers $+\infty$, nous avons pour $n \in Q$ assez grand $|a_n - w_n| < \frac{1}{2}|z - w_n|$. Ainsi, il existe $n_0 \in Q$ tel que pour tout $n \geq n_0$ dans Q,

$$|f_n(z) - 1| = \left|1 - W_n\left(\frac{a_n - w_n}{z - w_n}\right)\right| \leq \left|\frac{a_n - w_n}{z - w_n}\right|^n \leq \frac{1}{2}^n, z \in K$$

La série $\sum_{n\in Q} |f_n - 1|$ converge donc uniformément sur tout compact de U. La fonction

$$f(z) = g(z) \prod_{n\in Q} f_n(z)$$

est alors solution du problème de Weierstrass sur U. ■

Troisième partie
Applications à la Théorie des Nombres

11 Séries de Dirichlet

11.1 Définitions et Convergence

Définition 11.1: Série de Dirichlet

Une série de Dirichlet est une expression de la forme

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}, s \in \mathbb{C}$$

pour $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$.

Définition 11.2: Abscisse de Convergence

Soit $F(s)$ une série de Dirichlet.
L'abscisse de convergence est

$$\sigma_{conv} = \inf\{\Re s | F(s) \text{ converge }\}.$$

L'abscisse de convergence absolue est

$$\sigma_{abs} = \inf\{\Re s | F(s) \text{ converge absolument}\}$$

La borne de prolongement holomorphe est définie par

$$\sigma_{hol} = \inf\left\{\sigma' \in \mathbb{R} \middle| F(s) \text{ admet un prolongement holomorphe sur } \Re s >'\right\}$$

Théorème 11.1: Landau

Supposons que $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ est à valeur positives et $\sigma_{abs} < \infty$. Alors, la série de Dirichlet $F(s)$ n'admet de prolongement holomorphe sur aucun voisinage de σ_{abs}. Dans ce cas, $\sigma_{hol} = \sigma_{abs}$.

Démonstration. On note $\sigma = \sigma_{abs}$. Supposons que $F(s)$ admette un prolongement holomorphe sur le disque $D(\sigma, 3\varepsilon)$. Alors, $F(s)$ est holomorphe sur $\Omega = D(\sigma, 3\varepsilon) \cup \{s \mid \Re s > \sigma\}$. Sur $D(\sigma+\varepsilon, 3\varepsilon) \subseteq \Omega$, $F(s)$ est somme de sa série de Taylor, et nous pouvons calculer $F^{(k)}$ en dérivant terme à terme la série de Dirichlet. Nous obtenons :

$$F(\sigma - \varepsilon) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(n)(-\log n)^k}{n^{\sigma+\varepsilon}} \frac{(-2\varepsilon)^k}{k!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^{\sigma-\varepsilon}}$$

en intervertissant les deux sommes. Donc F converge en $\sigma - \varepsilon$ donc sur le demi-plan $\Re s > \sigma - \varepsilon$, ce qui est absurde. ∎

Lemme 11.1

Soient $0 < \alpha < \beta$ et $z = x + iy$ avec $x > 0$. Alors,

$$\left|e^{-\alpha z} - e^{-\beta z}\right| \leq \left|\frac{z}{x}\right| \left(e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}\right)$$

En particulier, si $n \in \mathbb{N}^*$ et $\Re(s - s_0) > 0$:

$$\left|n^{-(s-s_0)} - (n+1)^{-(s-s_0)}\right| \leq \frac{|s - s_0|}{\Re(s - s_0)} \left(n^{-\Re(s-s_0)} - (n+1)^{\Re(s-s_0)}\right)$$

Théorème 11.2: Convergence Uniforme

Soit $F(s) = \sum f(n) n^{-s}$ une série de Dirichlet et $s_0 \in \mathbb{C}$.

1. Si la suite des sommes partielles $A_n(s_0)$ est bornée, alors $F(s)$ converge uniformément sur tout compact du demi plan $\Re(s - s_0) > 0$.
2. Si $F(s_0)$ converge, alors $F(s)$ converge uniformément dans tout secteur angulaire $|\arg(s - s_0)| \leq \alpha < \pi/2$ du demi-plan $\Re(s - s_0) \geq 0$.

Démonstration. Découle du lemme précédent et du lemme d'Abel. ∎

Corollaire 11.1: Holomorphie

Soit $F(s) = \sum f(n) n^{-s}$ une série de Dirichlet et $\sigma_{conv} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ son abscisse de convergence. Alors $F(s)$ converge en tout s du demi-plan $\Re(s) > \sigma_{conv}$ et définit une fonction holomorphe sur ce demi-plan. En particulier, $\sigma_{hol} \leq \sigma_{conv}$.

Corollaire 11.2: Dérivées

Les dérivées d'une série de Dirichlet sur le demi-plan $\Re s > \sigma_{conv}$ s'obtiennent par dérivation terme à terme :

$$F^{(k)}(s) = (-1)^k \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)(\log n)^k}{n^s}$$

11.2 Propriétés des Séries de Dirichlet

Lemme 11.2: Technique

Soif $F(s) = \sum f(n)n^{-s}$ une série de Dirichlet. Pour $N \geq 1$, $\Re s \geq c > \sigma_{abs}$ on a :

$$\left|\sum_{n=N}^{+\infty} f(n)n^{-s}\right| \leq N^{-(\Re s - c)} \sum_{n=N}^{+\infty} |f(n)|\, n^{-c} n^{-(\Re s - c)}$$

Théorème 11.3: Limite en l'infini

Soit $s = \sigma + it$ avec $\sigma, t \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\lim_{\sigma \to +\infty} F(\sigma + it) = f(1)$$

uniformément en t.

Démonstration. Soit $c > \sigma_{abs}$ D'après le lemme 11.2 précédent, pour $\sigma > c$, on a :

$$\left|\sum_{n=2}^{+\infty} f(n)n^{-s}\right| \leq 2^{-(\sigma - c)} \sum_{n=2}^{+\infty} |f(n)|\, n^{-c} = \frac{A}{2^{\sigma}}$$

où A est indépendant de σ et de t. ■

Théorème 11.4: Unicité des Coefficients

Soit deux séries de Dirichlet

$$F(s) = \sum f(n)n^{-s} \text{ et } G(s) = \sum g(n)n^{-s}$$

qui convergent absolument pour $\Re s > \sigma_{abs}$. Si $F(s) = G(s)$ pour une suite s_k avec $\Re s_k \xrightarrow[k \to \infty]{} +\infty$, alors $f(n) = g(n)$ pour tout n.

Démonstration. Posons $h(n) = f(n) - g(n)$ et $H = F - G$. Suppsons qu'il existe N minimal avec $h(N) \neq 0$. Ainsi,

$$H(s) = \frac{h(N)}{N^s} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} h(n)n^{-s} \text{ et } h(N) = N^s H(s) - N^s \sum_{n=N+1}^{+\infty} h(n)n^{-s}$$

Pour $s = s_k, H(s_k) = 0$, donc

$$h(N) = -N^{s_k} \sum_{n=N+1}^{+\infty} h(n)n^{-s_k}$$

Soit k tel que $\Re s_k > c > \sigma_{abs}$. Par le lemme technique 11.2,

$$|h(N)| \leq \left(\frac{N}{N+1}\right)^{\Re s_k} A$$

où A est indépendant de k. On trouve $h(N) = 0$ en faisant tendre k vers plus l'infini. ■

Théorème 11.5: Produit et Convolution

Soit deux séries de Dirichlet

$$F(s) = \sum f(n)n^{-s}, G(s) = \sum \frac{g(n)}{n^s}$$

Alors, sur un demi-plan sur lequel ces deux séries convergent absolument, nous avons :

$$F(s)G(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{h(n)}{n^s}$$

avec $h(n) = (f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d})$.

Démonstration. Pour tout s dans un demi-plan de convergence de F et G,

$$F(s)G(s) = \sum_{n\geq 1}\sum_{m\geq 1} f(n)g(m)(mn)^{-s}$$

Par convergence absolument, en réordonnant les termes :

$$F(s)G(s) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sum_{mn=k} f(n)g(m)\right)k^{-s} = \sum_{k\geq 1} h(k)k^{-s}$$

■

On montre par exemple ainsi que $\zeta(s)\sum_{n\geq 1}\frac{\mu(n)}{n^s} = 1$, où μ est la fonction de Moebius définie par :

$$\mu(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est divisible par un carré différent de } 1 \\ 1 & \text{si } n \text{ est le produit d'un nombre pair de premiers distincts} \\ -1 & \text{si } n \text{ est le produit d'un nombre impair de premiers distincts} \end{cases}$$

11.3 Formule de la moyenne

Théorème 11.6: Formule de la Moyenne

Soient deux séries de Dirichlet $F(s)$ et $G(s)$ d'abscisses de convergence absolue respectives σ_{abs} et σ'_{abs}. Alors, pour $a > \sigma_{abs}$ et $b > \sigma'_{abs}$,

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} F(a+it)G(b-it)\,\mathrm{d}t = \sum_{n\geq 1}\frac{f(n)g(n)}{n^{a+b}}.$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} F(a+it)G(b-it) &= \left(\sum_{m\geq 1}\frac{f(m)}{m^{a+it}}\right)\left(\sum_{n\geq 1}\frac{g(n)}{n^{b-it}}\right) \\ &= \sum_{m}\sum_{n}\frac{f(m)g(n)}{m^a n^b}\left(\frac{n}{m}\right)^{it} \\ &= \sum_{n\geq 1}\frac{f(n)g(n)}{n^{a+b}} + \sum_{m\geq 1}\sum_{n\geq 1, n\neq m}\frac{f(m)g(n)}{m^a n^b}\left(\frac{n}{m}\right)^{it} \end{aligned}$$

avec

$$\sum_{m\geq 1}\sum_{n\geq 1, n\neq m}\left|\frac{f(m)g(n)}{m^a n^b}\left(\frac{n}{m}\right)^{it}\right| \leq \sum_{m\geq 1}\frac{|f(m)|}{m^a}\sum_{n\geq 1}\frac{|g(n)|}{n^b}$$

uniformément convergente pour tout t. En intégrant terme à terme on trouve bien le résultat. ■

Théorème 11.7: Isolement des Coefficients

Pour $\sigma > \sigma_{abs}$ et $x > 0$, on a :

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} F(\sigma+it)x^{\sigma+it}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} f(n) & \text{si } x = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

11.4 Produits Eulériens

Définition 11.3: Fonction Multiplicative

Une fonction f est dite multiplicative si $f(1) = 1$ et si pour tous m, n premiers entre eux, $f(mn) = f(m)f(n)$. f est dite complètement multiplicative si de plus $f(mn) = f(m)f(n)$ pour tous m, n.

Lemme 11.3: Valeurs Primales

Soit f multiplicative telle que $\sum_{n\geq 1} |f(n)|$ converge. Alors,

$$\sum f(n) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 + \sum_{k\geq 1} f(p^k)\right)$$

Si de plus f est complètement multiplicative,

$$\sum_{n\geq 1} f(n) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{1-f(p)}$$

Démonstration. Soit $P(x) = \prod_{p\leq x}\left(1 + \sum_{k\geq 0} f(p^k)\right)$. On a $P(x) = \sum_{n\in A} f(n)$ où A est l'ensemble des entiers n n'ayant que des facteurs premiers plus petits que x. Ainsi,

$$\left|\sum_{n\geq 1} f(n) - P(x)\right| \leq \sum_{n>x} |f(n)|$$

mais par hypothèse, le membre de droite tend vers 0 quand $x \to 0$. ■

Théorème 11.8: Produit Eulériens

Supposons que la série de Dirichlet $\sum f(n)n^{-s}$ converge absolument pour $\Re s > \sigma_{abs}$. Si f est multiplicative,

$$\sum_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 + \sum_{k\geq 1} \frac{f(p^k)}{p^{ks}}\right), \text{ pour } \Re s > \sigma_{abs}$$

Si f est complètement multiplicative :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{1-\frac{f(p)}{p^s}}$$

11.5 Fonctions L

Définition 11.4: Caractère de Dirichlet

Un caractère de Dirichlet modulo D est un morphisme de groupe $\chi : \mathbb{Z}/D\mathbb{Z}^* \to \mathbb{C}^*$. Le caractère trivial est le caractère constant 1.

On notera également χ la fonction périodique sur $\mathbb{Z}$ de période D définie par la projection modulo D composée avec χ.

Définition 11.5: Fonction L de Dirichlet

La fonction L de Dirichlet est la série de Dirichlet

$$L(\chi, s) = \sum_{n\geq 1} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

où χ est un caractère de Dirichlet modulo D.

Proposition 11.1: Propriétés

Soit χ un caractère de Dirichlet modulo D.

1. L'Abscisse de convergence absolue de $L(\chi, s)$ est 1
2. Si $\Re s > 1$, $L(\chi, s) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{1-\chi(p)p^{-s}}$ converge sur tout demi-plan $\Re(s) > c > 1$.
3. Si $\chi \neq \chi_0$, $\sigma_{conv} = 0$.

Démonstration. Seul le point 3 demande démonstration, le reste découlant immédiatement de résultats précédents.
Si $\chi \neq \chi_0$, il existe $a \in \mathbb{Z}/D\mathbb{Z}^*$ avec $\chi(a) \neq 1$. Ainsi,

$$\chi(a) \sum_{x\in\mathbb{Z}/D\mathbb{Z}^*} \chi(x) = \sum_{x\in\mathbb{Z}/D\mathbb{Z}^*} \chi(x)$$

et $\sum_{x\in\mathbb{Z}/D\mathbb{Z}^*} \chi(x) = 0$. Par conséquent, toutes les sommes partielles sont bornées et on conclut par le théorème 11.2 ■

Proposition 11.2: Prolongement Holomorphe

Si $\chi \neq \chi_0$, la fonction $L(s, \chi)$ est prolongeable en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Démonstration. Soit $f(t) = \sum_{n\geq 1} \chi(n)e^{-nt}$. La fonction f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrons que f est prolongeable en 0. On a :

$$f(t) = \sum_{j=1}^{D} \sum_{k\geq 0} \chi(j + kD)e^{-(j+kD)t} = \frac{1}{1 - e^{-Dt}} \sum_{j\in\mathbb{Z}/D\mathbb{Z}^*} \chi(j)e^{-jt}$$

On peut donc prolonger f en 0. Ainsi,

$$L(s, \chi) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty f(t)t^{s-1}\, \mathrm{d}t$$

est prolongeable sur $\mathbb{C}$. ■

Lemme 11.4: Ordre et Caractère

Pour $p \in \mathcal{P}$ premier avec D, soit $g(p) = \varphi(D)/n(p)$. Alors, on a :

$$(1 - T^{n(p)})^{g(p)} = \prod_{\chi}(1 - \chi(p)T)$$

Démonstration. On a :

$$1 - T^{n(p)} = \prod_{z \in U_{n(p)}} (1 - \chi(p)T)$$

Pour tout $z \in U_{n(p)}$ il existe $g(p)$ caractères de $\mathbb{Z}/D\mathbb{Z}^*$ valant z en p car le noyau du morphisme :

$$\psi : \mathbb{Z}/\hat{D}\mathbb{Z}^* \to U_{n(p)}, \chi \mapsto \chi(p)$$

est de cardinal $g(p)$. ■

Définition 11.6: Zeta des Caractères

Pour $\Re s > 1$, on note

$$\zeta_D(s) = \prod_{\chi} L(s, \chi)$$

Proposition 11.3: Zeta Dirichlet

La fonction ζ_D est une série de Dirichlet à coefficients positifs et convergente pour $\Re s > 1$.

Démonstration. On a $\zeta_D(s) = \prod_{p \in \mathcal{P},(p,D)=1}, \frac{1}{(1-p^{-n(p)s})^{-g(p)}}$ ■

Théorème 11.9: Valeur en 1

Si $\chi \neq \chi_0$, $L(1, \chi) \neq 0$

Démonstration. Si on avait $L(1, \chi) = 0$ pour $\chi \neq \chi_0$, on aurait

$$\zeta_D(s) \leq 1 + \sum_{p \in \mathcal{P},(p,D)=1} g(p)p^{-n(p)s}$$

et donc, en $s = 0$, $\zeta_D(0) \geq +\infty$, ce qui est absurde. ■

Définition 11.7: Premiers Modulos D

Pour $a \in \mathbb{N}, (a, D) = 1$, on note

$$\mathcal{P}_a = \{p \in \mathcal{P} |\ p \equiv a \mod D\}$$

On note de plus, pour χ un caractère de $\mathbb{Z}/D\mathbb{Z}^*$

$$f_\chi(s) = \sum_{p \in \mathcal{P}, p \nmid D} \chi(p)p^{-s}$$

Lemme 11.5: Moyenne

Pour $a \in \mathbb{N}$, $(a, D) = 1$,

$$\sum_{p \in \mathcal{P}_a} = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi} \overline{\chi(a)} f_\chi(s)$$

Démonstration. On a, $\sum_\chi \overline{\chi(a)} f_\chi(s) = \sum_{p\in\mathcal{P},(p,D)=1} \sum_\chi \overline{\chi(a)}\chi(p)p^{-s}$. Or :

$$\sum_\chi \overline{\chi(a)}\chi(p) = \begin{cases} \varphi(D) & \text{si } a \equiv p \mod D \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

D'où le résultat. ■

Lemme 11.6: Bornitude

1. Si $\chi \neq \chi_0$, f_χ est bornée au voisinage de 1.
2. Si $\chi = \chi_0$, $\lim_{s\to 1} \frac{f_{\chi_0}(s)}{\ln(s-1)^{-1}} = 1$

Théorème 11.10: Progression Arithmétique

Soit $D \geq 2$, $(a, D) = 1$. L'ensemble $\mathcal{P}_a$ a une densité

$$\lim_{s\to 1} \frac{\sum_{p\in\mathcal{P}_a} p^{-s}}{\ln(s-1)^{-1}} = \frac{1}{\varphi(D)}$$

En particulier, il existe un nombre infini de premiers congrus à a modulo D.

Démonstration. On applique successivement les deux lemmes précédents. ■

11.6 Fonctions Zeta